Zur Theorie der linearen Differentialgleichung mit rationalem Integral.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde,

von der

philosophischen Fakultät der Albertus-Universität zu Königsberg i. Pr.

genehmigt

und

am Freitag den 1. Juli 1892, mittags 12 Uhr,

nebst den beigefügten Thesen öffentlich verteidigt

von

Arthur Hirsch

aus Königsberg i. Pr.

Opponenten:

Dr. phil. **Fritz Cohn.**

Dr. phil. **Ernst Gutzeit.**

Königsberg i. Pr.

Hartungsche Buchdruckerei.



Meinem verehrten Vater

in dankbarer Liebe

gewidmet.

§ 1.

Die Normalform der Differentialgleichung.

Die linearen homogenen Differentialgleichungen, deren Integrale sich an sämmtlichen Unstetigkeitspunkten „regulär“ verhalten, haben bekanntlich die von Herrn Fuchs*) angegebene Gestalt:

$$(1) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{r} \psi(x)^{r-\varkappa} p_\varkappa(x) \frac{d^{(r-\varkappa)}y}{dx^{r-\varkappa}} = 0 \,,$$

wobei

$$\psi(x) = \prod_{\varkappa=1}^{\varrho} (x-a_\varkappa) \,,$$

und $p_\varkappa(x)$ eine ganze rationale Function darstellt, deren Grad höchstens gleich $\varkappa\,(\varrho-1)$ ist. Die linearen Differentialgleichungen, welche durch rationale Functionen integrirt werden, gehören offenbar in diese Klasse. Die zu den singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ und ∞ gehörenden „determinirenden Fundamentalgleichungen“ geben den ersten Aufschluss über das Verhalten der Integrale; sollen nun letztere rationale Functionen sein, so ist zunächst erforderlich, dass die Wurzeln der genannten Gleichungen positive oder negative ganze Zahlen sind. Sei diese Bedingung erfüllt und unter den Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörenden Gleichung $\alpha_\varkappa$ die kleinste, so geht (1) durch die Substitution

$$y = \prod_{\varkappa=1}^{\varrho} (x-a_\varkappa)^{\alpha_\varkappa} . Y$$

in eine Differentialgleichung für Y über, deren Integrale an allen im Endlichen gelegenen Unstetigkeitspunkten, also überhaupt für endliche Werte des Arguments endlich bleiben. Damit ist unser Problem auf die Frage reducirt:

Wann ist das allgemeine Integral von (1) eine ganze rationale Function?

Bilden die ganzen rationalen Functionen $f_1, f_2, \ldots f_r$ ein Fundamentalsystem, so kann man (1) in die Form setzen:

$$(2) \qquad D(y) \equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' & \ldots & f_1^{(r-1)} & f_1^{(r)} \\ f_2 & f_2' & f_2'' & \ldots & f_2^{(r-1)} & f_2^{(r)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_r & f_r' & f_r'' & \ldots & f_r^{(r-1)} & f_r^{(r)} \\ y & y' & y'' & \ldots & y^{(r-1)} & y^{(r)} \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgeschrieben:

$$(3) \qquad D(y) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{r} D_\varkappa(x)\, y^{(r-\varkappa)} = 0,$$

---

*) Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, Crelle's Journal, Bd. 66.

wobei $D_\varkappa(x)$ eine ganze rationale Function ist, deren Grad, wie der Vergleich mit (1) zeigt, höchstens auf $(m-\varkappa)$ steigt, wenn mit m der Grad von $D_0(x)$ bezeichnet wird. Die Form der Determinante liefert uns die Relation:

$$D_1(x) = -\frac{dD_0(x)}{dx} = -D_0'(x).$$

Wir kennzeichnen nunmehr diejenige bis auf einen constanten Factor bestimmte Gestalt einer Differentialgleichung als Normalform, in welcher, wie eben, der zweite Coefficient gleich dem negativen Differentialquotienten des ersten ist, und benutzen für letzteren an Stelle von $D_0(x)$ fernerhin die Bezeichnung $A(x)$. Die Normalform ist dadurch ausgezeichnet, dass sich ihre Coefficienten in der Umgebung eines Punktes wie ganze rationale Functionen verhalten, wenn dasselbe von den Integralen vorausgesetzt ist.

Diese Eigenschaft der Normalform führt uns sogleich zu einer wichtigen Beziehung, die uns später unter einem andern Gesichtspunkte wieder begegnen wird. Es seien $f_1, f_2, \ldots f_r$ die r ganzen rationalen Integrale der Differentialgleichung:

$$(4) \qquad A\,y^{(r)} - A'\,y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} D_\varkappa\, y^{(r-\varkappa)} = 0;$$

ihre Differentiation ergiebt:

$$A\,y^{(r+1)} - (A'' - D_2)\,y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} (D'_\varkappa + D_{\varkappa+1})\,y^{(r-\varkappa)} = 0.$$

Fassen wir diese Gleichungen als Congruenzen nach dem Modul $A(x)$ auf, so schreiben sie sich:

$$\left.\begin{array}{l} -A'\,y^{(r-1)} + \sum\limits_{\varkappa=2}^{r} D_\varkappa\, y^{(r-\varkappa)} \equiv 0 \\ -(A''-D_2)\,y^{(r-1)} + \sum\limits_{\varkappa=2}^{r} (D'_\varkappa + D_{\varkappa+1})\,y^{(r-\varkappa)} \equiv 0 \end{array}\right\} \text{mod. } A,$$

woraus durch Elimination von $y^{(r-1)}$ folgt:

$$\sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{A'(D'_\varkappa + D_{\varkappa+1}) - (A''-D_2)D_\varkappa\right\} y^{(r-\varkappa)} \equiv 0 \text{ mod. } A,$$

also die identische Relation hervorgeht:

$$(5) \qquad \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{A'(D'_\varkappa + D_{\varkappa+1}) - (A''-D_2)D_\varkappa\right\} f_\lambda^{(r-\varkappa)} \equiv 0 \text{ mod. } A. \qquad (\lambda = 1, \ldots r)$$

Bezeichnen wir nun in der Determinante

$$A(x) = \left| f_\lambda^{(\varkappa)} \right| \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \ldots r \\ \varkappa = 0, \ldots (r-1) \end{pmatrix}$$

die Subdeterminante von $f_\lambda^{(r-1)}$ mit Δ_λ, so folgt weiter aus (5):

$$\Delta_\lambda \left\{ A'(D'_\varkappa + D_{\varkappa+1}) - (A''-D_2)\,D_\varkappa \right\} \equiv 0 \text{ mod. } A. \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \ldots r \\ \varkappa = 2, \ldots r \end{pmatrix}$$

Sind in diesen Congruenzen nicht alle Klammerausdrücke für sich durch A divisibel, so müssen sämmtliche Δ_λ, mithin auch $A'(x)$, welches sich aus den Δ_λ linear zusammensetzt, einen Factor mit $A(x)$ gemeinsam haben. Schliessen wir demnach das Auftreten von mehrfachen Factoren in $A(x)$ aus, so sind sämmtliche Klammerausdrücke durch $A(x)$ theilbar. Diese Thatsache ist aber offenbar eine Identität in den Zeichen der f und wird daher ganz unabhängig von der Gruppirung der Factoren von $A(x)$ Geltung haben. Wir erhalten so den Satz:

Ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$A\ y^{(r)} - A'\ y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} D_\varkappa\ y^{(r-\varkappa)} = 0$$

eine ganze rationale Function, so bestehen die Congruenzen:

$$A'(D'_\varkappa + D_{\varkappa+1}) - (A'' - D_2)\ D_\varkappa \equiv 0 \text{ mod. } A. \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

§ 2.

Aufstellung der Kriterien.

Wir wenden uns jetzt der Aufgabe zu, die Bedingungen zu ermitteln, unter welchen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$(1) \qquad A\ y^{(r)} - A'\ y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} D_\varkappa\ y^{(r-\varkappa)} = 0$$

eine ganze rationale Function ist. Indem wir aber vorläufig über den Grad der ganzen rationalen Functionen $A, D_2, D_3, \ldots D_r$ nichts festsetzen, so dass sich die Integrale im Unendlichen auch „irregulär" verhalten können, behandeln wir gleich das allgemeinere Problem, die Bedingungen aufzusuchen, unter denen die allgemeine Lösung von (1) eine eindeutige Function ist, welche im Endlichen den Charakter einer ganzen rationalen Function besitzt. — Die singulären Punkte von (1) sind, abgesehen von dem unendlich fernen Punkte, der einer besonderen Discussion bedarf, die Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad A(x) = 0,$$

bezüglich deren wir für das Folgende die wesentliche Voraussetzung treffen, dass sie sämmtlich von einander verschieden seien. Es sei jetzt $x = a$ eine derselben, so lautet die zugehörige determinirende Fundamentalgleichung:

$$\varrho\ (\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-r+1) - \varrho\ (\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-r+2) = \varrho\ (\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-r+2)(\varrho-r) = 0,$$

welche befriedigt wird durch die Werte:

$$(3) \qquad \varrho = 0, 1, 2, \ldots (r-2);\ r.$$

Infolge der ganzzahligen Differenzen dieser Wurzeln werden in der Entwicklung der Integrale im allgemeinen Logarithmen auftreten; damit dieselben in Wegfall kommen, ist nach den Principien des Herrn Fuchs*) notwendig und hinreichend, dass die Recursionsformeln, welche die Coefficienten des Ansatzes

---

*) Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, Crelle's Journal, Bd. 68, pag. 377.

$$y = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{c_\varkappa}{\varkappa!} (x-a)^\varkappa$$

bestimmen, keine lineare Abhängigkeit der Grössen

$$c_0, c_1, c_2, \ldots c_{r-2}$$

involviren. Um diese Recursionsformeln aufzustellen, differentiiren wir (1) mehrmals und setzen $x = a$ ein. Es ergiebt sich so:

$$- A'(a) c_{r-1} + \sum_{\varkappa=2}^{r} D_\varkappa(a) c_{r-\varkappa} = 0.$$

$$- (A''(a) - D_2(a)) c_{r-1} + \sum_{\varkappa=2}^{r} (D'_\varkappa(a) + D_{\varkappa+1}(a)) c_{r-\varkappa} = 0.$$

Die ferneren Differentiationen bestimmen, wie unmittelbar zu übersehen, die Grössen $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots$ als homogene lineare Functionen der Grössen $c_0, c_1, \ldots c_r$, und wir bedürfen ihrer daher nicht mehr. Aus den gewonnenen Relationen aber geht durch Elimination von c_{r-1} hervor:

$$\sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{ A'(a) (D'_\varkappa(a) + D_{\varkappa+1}(a)) - (A''(a) - D_2(a)) D_\varkappa(a) \right\} c_{r-\varkappa} = 0.$$

Die hierdurch bedingte lineare Abhängigkeit der Grössen $c_0, c_1, \ldots c_{r-2}$ wird nur dann aufgehoben, wenn ihre Coefficienten einzeln verschwinden; welche Forderung wir in die Form bringen:

$$A'(x) (D'_\varkappa(x) + D_{\varkappa+1}(x)) - (A''(x) - D_2(x)) D_\varkappa(x) \equiv 0 \text{ mod.} (x-a). \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

Indem wir die analogen Bedingungen für sämmtliche Wurzeln von $A(x) = 0$ zusammenfassen und uns der Voraussetzung erinnern, dass dieselben nur einfach auftreten sollen, erhalten wir als Kriterien der Eindeutigkeit der Integrale für alle endlichen Werte des Arguments die Congruenzen:

$$(4) \quad A'(x) (D'_\varkappa(x) + D_{\varkappa+1}(x)) - (A''(x) - D_2(x)) D_\varkappa(x) \equiv 0 \text{ mod. } A. \quad (\varkappa = 2, 3, \ldots r).$$

Zur vollständigen Erledigung unserer Aufgabe erübrigt es noch, das Verhalten der Integrale in der Umgebung des unendlich fernen Punktes zu discutiren; doch sind wir dessen, wie eine kurze Ueberlegung zeigt, überhoben. Lassen wir nämlich das Argument in der complexen Ebene einen Umlauf um den unendlich fernen Punkt vollführen, so ist derselbe einem Umlauf in entgegengesetzter Richtung um alle im Endlichen gelegenen Punkte äquivalent. Letzterer führt aber die Integrale infolge ihrer Eindeutigkeit im Endlichen zu ihrem Ausgangswerte zurück; wir schliessen daraus, dass sie sich auch im Unendlichen eindeutig verhalten müssen, sobald obige Congruenzen Geltung haben. Wir haben so den Satz erhalten:

Damit die allgemeine Lösung von (1) eine eindeutige Function ist, welche im Endlichen den Charakter einer ganzen rationalen Function trägt, ist erforderlich und hinreichend das Bestehen der Congruenzen (4).

Beiläufig sei bemerkt, dass in der Entwicklung der Integrale im allgemeinen Falle, wie eine genauere Untersuchung zeigt, Logarithmen auch nur in der ersten Potenz auftreten, woraus sich die Anzahl der erhaltenen Kriterien erklärt.

Indem wir jetzt zu unserm eigentlichen Probleme zurückkehren, entnehmen wir aus dem Vorhergehenden in Verbindung mit den Ergebnissen des § 1 unmittelbar das Resultat:

Damit das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$A\, y^{(r)} - A'\, y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} D_\varkappa\, y^{(r-\varkappa)} = 0$$

sich durch eine ganze rationale Function darstellt, ist erforderlich und hinreichend, dass, unter m den Grad der ganzen rationalen Function $A(x)$ verstanden, die Coefficienten $D_\varkappa(x)$ Functionen desselben Charakters vom Grade $(m-\varkappa)$ sind, welche die Congruenzen erfüllen:

$$A'(D'_\varkappa + D_{\varkappa+1}) - (A'' - D_2)\, D_\varkappa \equiv 0 \text{ mod. } A. \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass $A(x)$ nur einfache Factoren besitzt; andernfalls bleiben obige Bedingungen zwar notwendig, verlieren aber ihren erschöpfenden Charakter.

Es darf hervorgehoben werden, dass diesem Ergebnis zufolge zur Prüfung der Differentialgleichung hinsichtlich ihrer Integrabilität durch eine ganze rationale Function nur rationale Operationen erforderlich sind, dass es also nicht der Kenntnis der Wurzeln der Gleichung $A(x) = 0$ bedarf.

§ 3.

Die Congruenzen als Identitäten.

Da die bisherigen Entwicklungen für die eben gemachte Bemerkung, dass das Bestehen obiger Congruenzen für die Existenz einer ganzen rationalen Lösung in allen Fällen erforderlich ist, noch keinen directen Beweis geliefert haben, so dürfte es nicht überflüssig sein, einen solchen auf Grund einer formalen Identität zu erbringen. Bezeichnen wir zu dem Zweck die Determinante

$$\left| f_\iota^{(\lambda_\varkappa)} \right| \quad (\iota, \varkappa = 1, 2, \ldots r) \quad \text{mit} \quad \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r\},$$

so gilt:

$$A = \{0, 1, \ldots (r-1)\}.$$
$$A' = \{0, 1, \ldots (r-2);\ r\}.$$
$$A'' = \{0, 1, \ldots (r-3);\ (r-1), r\} + \{0, 1, \ldots (r-2);\ (r+1)\}.$$
$$D_2 = \{0, 1, \ldots (r-3);\ (r-1), r\}.$$
$$D_\varkappa = (-1)^\varkappa \{0, 1, \ldots (r-\varkappa-1);\ (r-\varkappa+1), \ldots r\}.$$
$$D'_\varkappa = (-1)^\varkappa \{0, 1, \ldots (r-\varkappa-2);\ (r-\varkappa), \ldots r\} + (-1)^\varkappa \{0, 1, \ldots (r-\varkappa-1);\ (r-\varkappa+1), \ldots (r-1);\ (r+1)\},$$

woraus sich ergiebt:

$$(1) \qquad (-1)^\varkappa \{A'(D'_\varkappa + D_{\varkappa+1}) - (A'' - D_2) D_\varkappa\} =$$
$$\{0, 1, \ldots (r-2);\ r\}\ \{0, 1, \ldots (r-\varkappa-1);\ (r-\varkappa+1), \ldots (r-1);\ (r+1)\} -$$
$$\{0, 1, \ldots (r-2);\ (r+1)\}\ \{0, 1, \ldots (r-\varkappa-1);\ (r-\varkappa+1), \ldots (r-1);\ r\}.$$

Betrachten wir jetzt die folgende Determinante Δ:

$$\begin{vmatrix}
f_1 & f'_1 & \ldots & f_1^{(\varkappa)} & \ldots & f_1^{(r-2)} & f_1^{(r-1)} & f_1^{(r)} & f_1^{(r+1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
f_2 & f'_2 & \ldots & f_2^{(\varkappa)} & \ldots & f_2^{(r-2)} & f_2^{(r-1)} & f_2^{(r)} & f_2^{(r+1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_r & f'_r & \ldots & f_r^{(\varkappa)} & \ldots & f_r^{(r-2)} & f_r^{(r-1)} & f_r^{(r)} & f_r^{(r+1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
f_1 & f'_1 & \ldots & f_1^{(\varkappa)} & \ldots & f_1^{(r-2)} & f_1^{(r-1)} & f_1^{(r)} & f_1^{(r+1)} & f_1 & f'_1 & \ldots & f_1^{(\varkappa-1)} & f_1^{(\varkappa+1)} & \ldots & f_1^{(r-2)} \\
f_2 & f'_2 & \ldots & f_2^{(\varkappa)} & \ldots & f_2^{(r-2)} & f_2^{(r-1)} & f_2^{(r)} & f_2^{(r+1)} & f_2 & f'_2 & \ldots & f_2^{(\varkappa-1)} & f_2^{(\varkappa+1)} & \ldots & f_2^{(r-2)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_r & f'_r & \ldots & f_r^{(\varkappa)} & \ldots & f_r^{(r-2)} & f_r^{(r-1)} & f_r^{(r)} & f_r^{(r+1)} & f_r & f'_r & \ldots & f_r^{(\varkappa-1)} & f_r^{(\varkappa+1)} & \ldots & f_r^{(r-2)}
\end{vmatrix}$$

In den ersten $(r+2)$ Verticalreihen verschwindet offenbar jede Determinante $(r+2)$-ter Ordnung identisch, also ist $\Delta = 0$. Stellen wir aber Δ nach dem Laplace'schen Satze als homogene lineare Function der Subdeterminanten r-ten Grades aus den r ersten Horizontalreihen dar, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta = & \left\{0, 1, \ldots (r-2);\ (r-1)\right\} \left\{0, 1, \ldots (\varkappa-1);\ (\varkappa+1), \ldots (r-2);\ r;\ (r+1)\right\} \\
- & \left\{0, 1, \ldots (r-2);\ r\right\} \left\{0, 1, \ldots (\varkappa-1);\ (\varkappa+1), \ldots (r-2);\ (r-1);\ (r+1)\right\} \\
+ & \left\{0, 1, \ldots (r-2);\ (r+1)\right\} \left\{0, 1, \ldots (\varkappa-1);\ (\varkappa+1), \ldots (r-2);\ (r-1);\ r\right\}
\end{aligned}$$

Indem wir hierin $\varkappa$ durch $(r-\varkappa)$ ersetzen, schliessen wir, dass die rechte Seite von (1) gleich ist:

$$\left\{0, 1, \ldots (r-2), (r-1)\right\} . \left\{0, 1, \ldots (r-\varkappa-1);\ (r-\varkappa+1), \ldots (r-2);\ r, (r+1)\right\},$$

woraus hervorgeht:

$$(2) \qquad (-1)^{\varkappa} A^{-1} \left\{A'(D'_{\varkappa}+D_{\varkappa+1}) - (A''-D_2)\, D_{\varkappa}\right\} =$$
$$\left\{0, 1, \ldots (r-\varkappa-1);\ (r-\varkappa+1), \ldots (r-2);\ r, (r+1)\right\}. \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

Wenn nun die Integrale $f_1, f_2, \ldots f_r$ ganze rationale Functionen sind, so ist auch die rechte Seite von (2) eine solche, und es folgt:

$$A'(D'_{\varkappa}+D_{\varkappa+1}) - (A''-D_2)\, D_{\varkappa} \equiv 0 \text{ mod. } A. \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

q. e. d.

Nachdem wir unsere Aufgabe unter der Annahme, dass $A(x)$ nur einfache Factoren besitzt, absolvirt haben, würde es sich darum handeln, auch die weiteren Fälle, in welchen $A(x)$ mit zweifachen, dreifachen u. s. w. Factoren behaftet ist, zu untersuchen. Doch nehmen wir von der allgemeinen Durchführung Abstand, da die Methode dieselbe bleibt und nur die Ergebnisse sich compliciren, indem wir bei späterer Gelegenheit auf besondere Punkte der Frage zurückkommen werden.

§ 4.

Untersuchung des unendlich fernen Punktes.

Obgleich es zur Aufstellung der notwendigen Kriterien sich als überflüssig erwies, die besonderen Bedingungen zu ermitteln, unter denen das Integral sich in der Umgebung des unendlich fernen Punktes wie eine ganze rationale Function verhält, so dürfte ein näheres Eingehen auf diese Frage doch geeignet erscheinen, um möglicherweise eine andere Darstellung der erhaltenen Kriterien zu gewinnen. Zu diesem Zweck empfiehlt sich die Annahme, dass die Integrale $f_1, f_2, \ldots f_r$ sämmtlich von demselben Grade sein mögen. Es liegt hierin keine Einschränkung unserer Fragestellung, da es gestattet ist, eine ganze Function, in welcher die höchste auftretende Potenz des Arguments die $(n-\nu)$-te ist, mit dem Grade n zu belegen, indem man annimmt, dass ν Wurzelpunkte ins Unendliche fallen. Nach dieser Auffassung ist der erste Coefficient A (x) der Differentialgleichung

$$(1) \qquad D(y) \equiv A\ y^{(r)} - A'\ y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} D_\varkappa\ y^{(r-\varkappa)} = 0$$

die Jacobi'sche Combinante, oder, wie wir sie auch nennen wollen, die Haupt-Combinante oder -Determinante der Formenschaar

$$c_1\ f_1 + c_2\ f_2 + \ldots + c_r\ f_r$$

und in dieser Eigenschaft von der Ordnung $m = r\,(n - r + 1)$ und dem Gewichte $p = \frac{r\,.\,(r-1)}{2}$. Um die hierdurch angedeutete Beziehung unseres Problems zur Invariantentheorie weiter zu verfolgen, werden wir uns der functionalen Darstellung der invarianten Gebilde bedienen, welche von Herrn Hilbert*) eingeführt worden ist. Es sei F (x) eine Function vom Grade ϱ, so bezeichnen wir ihre λ-te Ableitung

$$\frac{d^{(\lambda)}\,F(x)}{dx^\lambda} \quad \text{mit} \quad \frac{\varrho!\,F_\lambda(x)}{(\varrho-\lambda)!};$$

in dieser Schreibweise stellt sich zum Beispiel die ϱ-te Ueberschiebung zweier Functionen φ und ψ von den Graden μ und ν dar durch

$$\{\varphi,\psi\}_\varrho = \sum_{\varkappa=0}^{\varrho} (-1)^\varkappa \varrho_\varkappa \cdot \varphi_\varkappa\ \psi_{\varrho-\varkappa},$$

wobei unter $\varrho_\varkappa$ der Binomialcoefficient $\frac{\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\varkappa+1)}{1\ \ 2\ \ \ldots\ \ \varkappa}$ verstanden ist. Dieselbe ist bekanntlich eine Simultancovariante von φ und ψ von der Ordnung $(\mu+\nu-2\varrho)$. Wir behalten diese Definition auch bei, wenn φ und ψ einander gleich sind, oder wenn $\varrho = 0$ ist, in welchem Falle $\{\varphi,\psi\}_0$ sich auf das Product $\varphi\,.\,\psi$ reducirt. — Nach dieser Vorbemerkung treten wir nunmehr an unsere Frage heran, die wir so formuliren:

Wie muss (1) beschaffen sein, damit die allgemeine Lösung in der Umgebung des unendlich fernen Punktes die Entwicklung

*) Hilbert, Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete, Mathem. Annalen, Bd. 30, pag. 15.

$$(2) \qquad y = x^n\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \dots\right)$$

zulässt?

Indem wir jetzt y als Function n-ten Grades von x behandeln, bemerken wir, dass

$$A\,y^{(r)} - A'y^{(r-1)} = \frac{n!}{(n-r)!}A\,y_r - r(n-r+1)A_1\frac{n!}{(n-r+1)!}y_{r-1} = \frac{n!}{(n-r)!}(A\,y_r - rA_1y_{r-1})$$

ist; der Ausdruck rechts in der Klammer stimmt aber überein mit den Anfangsgliedern von

$$\{A, y\}_r = \sum_{\varkappa=0}^{r}(-1)^{\varkappa}r_{\varkappa}\,.\,A_{\varkappa}\,y_{r-\varkappa},$$

so dass wir den Differentialausdruck D(y) in die Form setzen können:

$$D(y) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[\{A, y\}_r + \bar{D}_2\,y^{(r-2)} + \bar{D}_3\,y^{(r-3)} + \dots + \bar{D}_r\,y\right].$$

Es liegt nahe, die Zusammenfassung dieser Summe durch ein Aggregat von Ueberschiebungen fortzusetzen, was offenbar nur auf eine Weise möglich ist. Wir können demnach der Differentialgleichung die Gestalt erteilen:

$$(3) \qquad \{A, y\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r}\{P_{\varkappa}, y\}_{r-\varkappa} = 0.$$

Der Grad der hier als Coefficienten auftretenden Functionen $P_{\varkappa}$ ist ihrer Bildungsweise zufolge höchstens gleich $(m-\varkappa)$ und werde mit $(m-\varkappa-\delta_{\varkappa})$ bezeichnet, so dass $\delta_{\varkappa} > 0$ ist. Wir wenden jetzt, wie es bei der Behandlung des unendlich fernen Punktes üblich ist, die lineare Transformation des Arguments $x = t^{-1}$ an, welche sich für die Form (3) der Differentialgleichung besonders einfach gestaltet. Durch dieselbe gehe über

$$A(x) \text{ in } t^{-m}\,B(t),\ \ P_{\varkappa}(x) \text{ in } t^{-(m-\varkappa-\delta_{\varkappa})}\,Q_{\varkappa}(t),\ \ y(x) \text{ in } t^{-n}\,\eta(t),$$

so sind B(t) und die $Q_{\varkappa}(t)$ ganze Functionen, während $\eta(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ gemäss (2) die Entwicklung hat:

$$(4) \qquad \eta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots\ .$$

Berücksichtigen wir jetzt, dass y als Function n-ten Grades zu behandeln ist, so hat

$\{A, y\}_r$ den Grad $(m + n - 2r)$,

$\{P_{\varkappa}, y\}_{r-\varkappa}$ den Grad $(m-\varkappa-\delta_{\varkappa}) + n - 2(r-\varkappa) = (m + n - 2r + \varkappa - \delta_{\varkappa})$,

und aus dem Begriff der Simultancovariante fliessen die Beziehungen:

$$\{B(t),\ \eta(t)\}_r = (-1)^r\ t^{(m+n-2r)}\ \{A(x),\ y(x)\}_r,$$
$$\{Q_{\varkappa}(t),\ \eta(t)\}_{r-\varkappa} = (-1)^{r-\varkappa}\ t^{(m+n-2r+\varkappa-\delta_{\varkappa})}\ \{P_{\varkappa}(x),\ y(x)\}_{r-\varkappa};$$

so dass (3) durch unsere Transformation übergeht in

$$(5) \qquad \{B, \eta\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r}(-1)^{\varkappa}\,t^{\delta_{\varkappa}-\varkappa}\,\{Q_{\varkappa}, \eta\}_{r-\varkappa} = 0\,.$$

Da diese Differentialgleichung die Normalform hat, so müssen sich, wie aus (4) hervorgeht, ihre Coefficienten

$$t^{\delta_2 - 2} Q_2(t)\ , \qquad t^{\delta_3 - 3} Q_3(t), \ldots \ t^{\delta_r - r} Q_r(t)$$

in der Umgebung von $t = 0$ wie ganze rationale Functionen verhalten, woraus wir schliessen, dass $\delta_\varkappa = \varkappa$, also der Grad von $P_\varkappa$ gleich $(m - 2\varkappa)$ sein muss. — Dies ist eine notwendige Bedingung; dieselbe ist aber auch hinreichend, wenn nicht $A(x)$ Wurzelpunkte im Unendlichen besitzt; unter dieser Voraussetzung nämlich ist $t = 0$ kein singulärer Punkt von (5), $\eta(t)$ hat mithin die in (4) und $y(x)$ die in (2) angegebene Entwicklung. Ist aber $t = 0$ eine Wurzel von $B(t) = 0$, so treten noch diejenigen Bedingungen hinzu, welche aus der Behandlung des singulären Punktes $t = 0$ hervorgehen. — Wir ziehen aus diesem Resultat insbesondere den Schluss:

Wenn das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) eine ganze rationale Function n-ten Grades ist, so lässt sie sich in der Form darstellen:

$$\left\{A, y\right\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{P_\varkappa, y\right\}_{r-\varkappa} = 0,$$

wo A und die $P_\varkappa$ ganze Functionen von den bez. Graden $m = r(n-r+1)$ und $(m - 2\varkappa)$ sind.

Wir heben hervor, dass die einzelnen Glieder dieses Aggregats von Ueberschiebungen denselben Grad

$$r(n-r+1) - 2\varkappa + n - 2(r-\varkappa) = (r+1)(n-r)$$

besitzen; dass diese Zahl den Grad des Gesammtausdrucks darstellt, ergiebt sich schon daraus, dass der letztere gleich der Hauptcombinante der $(r+1)$ Functionen n-ten Grades $f_1, f_2, \ldots f_r, y$ ist.

Es ist evident, dass die hier abgeleiteten Bedingungen in den erschöpfenden Kriterien, welche wir früher erhalten haben, bereits enthalten sind und sich aus diesen müssen gewinnen lassen; indes gehen wir darauf nicht weiter ein.

Als Beispiel zu den obigen Darlegungen betrachten wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung. Es seien φ und ψ zwei ganze rationale Functionen n-ten Grades, so ist ihre Hauptcombinante:

$$A = (\varphi\psi_1 - \varphi_1\psi),$$

deren Differentialquotienten

$$2A_1 = (\varphi\psi_2 - \varphi_2\psi),$$
$$2(2n-3)A_2 = (n-2)(\varphi\psi_3 - \varphi_3\psi) + n(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)$$

zu der Relation führen:

$$\left\{A, \varphi\right\}_2 - \frac{(n-2)}{2(2n-3)}\varphi \cdot (\varphi\psi_3 - 3\varphi_1\psi_2 + 3\varphi_2\psi_1 - \varphi_3\psi) = \frac{(n-2)}{2(2n-3)}\varphi \cdot \left\{\varphi, \psi\right\}_3,$$

und analog:

$$\left\{A, \psi\right\}_2 = \frac{(n-2)}{2(2n-3)}\psi \cdot \left\{\varphi, \psi\right\}_3.$$

Setzen wir nun

$$P = -\frac{(n-2)}{2(2n-3)} \cdot \left\{ \varphi, \psi \right\}_3 ,$$

so genügen φ und ψ der Differentialgleichung:

$$\left\{ A, y \right\}_2 + P \cdot y = 0;$$

und hier ist in der That A vom Grade $2(n-1)$, und die ganze Function P, welche sich ebenfalls als Combinante von φ und ψ erweist, vom Grade $2(n-3)$.

§ 5.

Der invariante Charakter der Coefficienten.

Die soeben bei der Differentialgleichung zweiter Ordnung gemachte Bemerkung lässt uns vermuten, dass allgemein die eigentümliche Graderniedrigung, welche wir bei den Coefficienten der Differentialgleichung in ihrer neuen Gestalt kennen gelernt haben, ihren Ursprung habe in einer invariantentheoretischen Beziehung derselben zu den Integralfunctionen. Dies wollen wir weiter verfolgen.

Wie wir wissen, ist die linke Seite der Differentialgleichung in der Normalform nichts anderes als die Hauptdeterminante der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_r$ und y, und als solche eine Simultancovariante vom Grade $(r+1)(n-r)$; die beiden ersten Glieder ihrer Entwicklung nach den Ableitungen von y stimmen mit den entsprechenden Gliedern der Simultancovariante $\left\{ A, y \right\}_r$ gleichen Grades überein, wo A die Hauptdeterminante der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_r$ ist. Die Differenz beider Ausdrücke liefert also eine Simultancovariante, welche nur noch die Ableitungen von y bis zur $(r-2)$-ten enthält. Dieselbe sei

$$(1) \qquad \bar{D}(y) = \bar{D}_2\, y_{r-2} + \bar{D}_3\, y_{r-3} + \ldots + \bar{D}_r\, y ,$$

so muss sie der partiellen Differentialgleichung genügen:*)

$$(2) \qquad D_y(\bar{D}y) + D_f(\bar{D}y) = 0 ,$$

worin die Differentiationssymbole D_y und D_f die Bedeutung haben:

$$D_y = \quad y_0 \frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + 3y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + \ldots$$

$$D_f = \sum_{i=1}^{r} \left\{ f_{i0} \frac{\partial}{\partial f_{i1}} + 2f_{i1} \frac{\partial}{\partial f_{i2}} + 3f_{i2} \frac{\partial}{\partial f_{i3}} + \ldots \right\} .$$

Zufolge (2) ist also:

$$(r-2)\bar{D}_2\, y_{r-3} + (r-3)\bar{D}_3\, y_{r-4} + \ldots + \bar{D}_{r-1}\, y_0 + D_f(\bar{D}_2) \cdot y_{r-2} + D_f(\bar{D}_3) \cdot y_{r-3} + \ldots + D_f(\bar{D}_r) \cdot y = 0;$$

und da die Coefficienten der y_i einzeln verschwinden müssen, so ist insbesondere

$$D_f(\bar{D}_2) = 0 ,$$

oder in Worten: $\bar{D}_2$ ist eine Simultancovariante und zwar Combinante der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_r$, vom Gewichte $\left[\frac{r.(r-1)}{2} + 2 \right]$, also vom Grade $(r(n-r+1)-4)$. Bezeichnen wir

*) Siehe Hilbert, l. c. pag. 16.

jetzt $\overline{D}_2$ mit P_2, bilden die Covariante $\left\{P_2, y\right\}_{r-2}$ vom Grade $(r+1)(n-r)$ und ziehen dieselbe von dem Ausdruck $\overline{D}(y)$ ab, so bleibt eine Simultancovariante gleichen Grades, welche die Ableitungen von y nur bis zur (r—3)-ten enthält:

$$\overline{\overline{D}}(y) = \overline{\overline{D}}_3\, y_{r-3} + \overline{\overline{D}}_4\, y_{r-4} + \ldots + \overline{\overline{D}}_r\, y\,.$$

Vermöge ganz derselben Schlussweise wie oben finden wir nun, dass auch $\overline{\overline{D}}_3 = P_3$ eine Combinante der f und zwar vom Gewichte $\left[\frac{r\,.\,(r-1)}{2} + 3\right]$ und Grade $(r(n-r+1)-6)$ ist, u. s. w. Allgemein erhalten wir so das folgende Theorem:

Stellt man die lineare Differentialgleichung, welcher die Functionenschaar des Grades n

$$c_1\, f_1 + c_2\, f_2 + \ldots + c_r\, f_r$$

genügt, in der Normalform durch ein Aggregat von Ueberschiebungen dar:

$$\left\{A, y\right\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{P_\varkappa, y\right\}_{r-\varkappa} = 0,$$

so sind die Coefficienten A, $P_\varkappa$ Combinanten der Integralfunctionen bez. vom Grade $(r(n-r+1)-2\varkappa)$ und Gewichte $\left[\frac{r\,.\,(r-1)}{2} + \varkappa\right]$, worin $\varkappa$ die Werthe 0, 2, 3, ... r annimmt.

Es sei hervorgehoben, dass wir bei der Ableitung dieses Satzes weder über den Grad n der Functionen f noch überhaupt über ihre analytische Natur eine Voraussetzung getroffen haben. Unser Theorem bleibt also in Geltung, unabhängig davon, ob n eine ganze oder gebrochene Zahl, positiv oder negativ ist, gleichgültig, ob die f rationale oder transcendente, ganze oder gebrochene Functionen darstellen. — In den r Grössen A, P_2, P_3, ... P_r, welche so die lineare Differentialgleichung der Functionen f_1, f_2, ... f_r constituiren, haben wir in ihrer Abhängigkeit von letzteren und deren Ableitungen ein System von Combinanten gefunden, welches zu dem System der Grundformen in einer Beziehung steht, vergleichbar derjenigen, welche die Coefficienten einer algebraischen Gleichung, die „elementarsymmetrischen Functionen" der Wurzeln zu dem System der letzteren haben. Aus diesem Grunde bezeichnen wir die Coefficienten A, P_2, P_3, ... P_r als die „Elementarcombinanten" der Formenschaar.

§ 6.

Darstellung der Combinanten durch die Elementarcombinanten.

Es liegt nahe, die eben angedeutete Analogie weiter zu verfolgen. Bekanntlich lassen sich die ganzen symmetrischen Functionen eines Grössensystems als ganze rationale Functionen der elementarsymmetrischen Functionen desselben darstellen, und zwar nur auf eine Weise. In der That entspricht diesem Satze im Gebiete der Formentheorie folgendes Theorem:

Jede ganze rationale Combinante einer Formenschaar lässt sich nach Multiplication mit einer ganzen positiven Potenz der Jacobi'schen Combinante durch ein Aggregat von ganzen rationalen Simultancovarianten der Elementar-

combinanten darstellen, und zwar ist diese Darstellung nur auf **eine** Weise möglich, wenn die Ordnung der Grundformen willkürlich und unbestimmt gelassen wird.

Die letztere Behauptung ist evident; denn wären mehrere derartige Darstellungen möglich, so würde ihre Vergleichung eine Identität zwischen den Elementarcombinanten und deren Ableitungen liefern, welche sich nicht schon in den Zeichen derselben, sondern erst in denen der Grundformen identisch aufhebt. Diese Identität müsste für willkürliche Functionen Geltung haben, da denselben als Elementarcombinanten ein System von Grundformen als Integralen der durch jene constituirten Differentialgleichung stets entspricht. Das ist aber unmöglich, so lange der Grad n der Grundformen unbestimmt gelassen wird. — Werden letztere aber beispielsweise als ganze rationale Functionen n-ten Grades specialisirt, so bestehen allerdings Identitäten der genannten Art. Die Anzahl nämlich der unbestimmten Constanten eines solchen Formensystems ist $r(n-r+1)$, gleich der Anzahl der Constanten der Jacobi'schen Combinante. Man wird also schliessen, dass zu der allgemeinen Form m-ter Ordnung eine endliche Anzahl von r-fachen Mannigfaltigkeiten gehört, deren Hauptcombinante sie darstellt; — was übrigens streng bewiesen worden ist.*) Demnach sind in diesem Falle die Grössen $P_2, P_3, \dots P_r$ irrationale Covarianten von A und genügen daher gewissen algebraischen Gleichungen, deren Coefficienten rationale Covarianten von A sind. Diese Gleichungen sind dann Identitäten in dem gewünschten Sinne.

Zum Beweise des aufgestellten Theorems legen wir die Differentialgleichung

$$\left\{ A, y \right\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{ P_\varkappa, y \right\}_{r-\varkappa} = 0 \tag{1}$$

zu Grunde, worin y als Function des Grades n behandelt wird, und die A, $P_\varkappa$ die Elementarcombinanten von den bez. Graden $m = r(n-r+1)$, $(m-2\varkappa)$ der Integralfunctionen $f_1, f_2, \dots f_r$ darstellen. Zunächst lässt sich jede ganze rationale Combinante dieser Grössen als ganze rationale homogene Function von Determinanten

$$\left| f_{i, \lambda_\varkappa} \right| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots r)$$

darstellen. Nun gelten aber, sobald $\lambda_\varkappa \geqq r$ ist, vermöge (1) Relationen der Form:

$$A^{(\lambda_\varkappa - r+1)} \cdot y_{\lambda_\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{r-1} M_{\lambda_\varkappa, \nu} \cdot y_\nu ,$$

wo die Grössen $M_{\lambda_\varkappa, \nu}$ ganze rationale Functionen von $A, P_2, P_3, \dots P_r$ und ihren Ableitungen sind. Wir erhalten also:

$$A^c \cdot \left| f_{i, \lambda_\varkappa} \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{r-1} M_{\lambda_\varkappa, \nu} \cdot f_{i\,\nu} \right| = \left| M_{\lambda_\varkappa, \nu} \right| \cdot \left| f_{i\,\nu} \right| = A \cdot \left| M_{\lambda_\varkappa, \nu} \right| .$$

*) Siehe Brill, Ueber binäre Formen und die Gleichung 6-ten Grades, Mathem. Annalen, Bd. XX, pag. 333.

Jede Combinante ist daher, mit einer geeigneten Potenz von A multiplicirt, eine ganze rationale homogene Function der Grössen $A, P_2, P_3, \ldots P_r$ und ihrer Ableitungen. Bezeichnen wir eine solche mit $\Phi(A, A_1, \ldots, P_\varkappa, P_{\varkappa 1}, \ldots)$, so ist auf Grund ihrer Combinanteneigenschaft

$$(2) \qquad D_f(\Phi) = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial A_i} D_f(A_i) + \sum_\varkappa \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial P_{\varkappa i}} D_f(P_{\varkappa i}) = 0.$$

Nun ist aber, wenn man mit $\varDelta$ die Differentiation nach dem Argument bezeichnet:

$$D(\varDelta^i P_\varkappa) - \varDelta^i(DP_\varkappa) = i\,.\,(m - 2\varkappa - i + 1)\,.\,\varDelta^{i-1}(P_\varkappa)\,,^{*)}$$

woraus in Rücksicht auf die Gleichung $D(P_\varkappa) = 0$ die Relation hervorgeht:

$$D_f(P_{\varkappa i}) = i\,.\,P_{\varkappa, i-1}.$$

Dadurch geht (2) über in die Gleichung:

$$(3) \qquad \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial A_i}\, i\,.\,A_{i-1} + \sum_\varkappa \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial P_{\varkappa i}}\, i\,.\,P_{\varkappa, i-1} = 0\,,$$

welche aussagt, dass Φ eine Simultancovariante der Grössen $A, P_2, P_3, \ldots P_r$ ist, q. e. d.**)

Zugleich ist mit diesem Beweise eine Methode gegeben, wie man zu der erwähnten Darstellung von Combinanten gelangt.

§ 7.

Explicite Darstellung der Elementarcombinanten.

Nachdem wir die Elementarcombinanten einer Formenschaar vermittelst der Differentialgleichung, welche dieselbe erfüllt, definirt haben, wird es sich jetzt darum handeln, ihre explicite Darstellung durch die Grundformen und ihre Ableitungen zu geben. Da jedoch die hierzu erforderlichen Ueberlegungen und Rechnungen ziemlich umständlicher Natur sind, so beschränken wir uns auf die Angabe der Grundzüge der Entwicklung.

Zunächst stellen wir die „invariante" Form der Differentialgleichung, wie wir sie nennen wollen, mit der ursprünglichen zusammen:

$$(1) \qquad \{A, y\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r} \{P_\varkappa, y\}_{r-\varkappa} = 0\,,$$

$$(2) \qquad \varDelta_0\, y_r - \varDelta_1\, y_{r-1} + \varDelta_2\, y_{r-2} + \ldots + (-1)^r \varDelta_r\, y = 0\,,$$

worin mit $\varDelta_\varkappa$ die Determinante

$$\left| f_{i,\nu} \right| \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots r \\ \nu = 0, 1, \ldots (r-\varkappa-1), (r-\varkappa+1), \ldots r \end{pmatrix} = \left\{ 0, 1, \ldots (r-\varkappa-1); (r-\varkappa+1), \ldots r \right\}$$

*) Siehe Hilbert, l. c. pag. 18.

**) Der hiemit bewiesene Satz unterscheidet sich wesentlich von dem Theorem, welches Herr Gordan in seiner Abhandlung „Ueber Combinanten," Mathem Annalen, Bd. V, pag. 95 aufgestellt hat, gemäss welchem sich die Combinanten eines Formensystems als simultane Covarianten einer endlichen Anzahl unter ihnen darstellen lassen. Herrn Gordan ist es um die Darstellung in Form einer ganzen Function zu thun, während sich bei uns eine Darstellung in Form eines Bruches vermittelst einer bestimmten Anzahl elementarer Combinanten ergiebt.

bezeichnet ist, so dass Δ_0 mit A übereinstimmt. Der Vergleich von (1) und (2) ergiebt:

$$(3) \qquad \Delta_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} (-1)^\lambda (r-\lambda)_{\varkappa-\lambda} \, P_{\lambda,\, \varkappa-\lambda} \,, \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots r)$$

wenn wir P_0 mit A identificiren und P_1 gleich Null setzen.

Aus diesem Gleichungssystem sind umgekehrt die Grössen $P_\varkappa$ zu berechnen; man findet durch Induction und verificirt ohne Schwierigkeit das folgende Resultat:

$$(4) \qquad P_\varkappa = \sum_{\nu=0}^{\varkappa} (-1)^\nu (r-\nu)_{\varkappa-\nu} \frac{(m-2\varkappa+1)!}{(m-\varkappa-\nu+1)!} \Delta_\nu^{(\varkappa-\nu)}. \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

Wir benutzen diese Formel sogleich zur Untersuchung des einfachsten Falles, welcher eintreten kann, nämlich, dass der Grad der Formenschaar n gleich der Zahl ihrer Mannigfaltigkeit r ist. Unter dieser Annahme ist der Grad der Hauptcombinante $m = r(n-r+1)$ ebenfalls gleich r, und es ergiebt sich:

$$\Delta_\nu^{(\varkappa-\nu)} = \frac{\varkappa!}{\nu!} \Delta_\varkappa \,.$$

Wir haben also:

$$P_\varkappa = \frac{(r-2\varkappa+1)!}{(r-\varkappa)!} \Delta_\varkappa \,.\, \sum_{\nu=0}^{\varkappa} (-1)^\nu \varkappa_\nu \frac{(r-\nu)!}{(r-\varkappa-\nu+1)!} =$$

$$(-1)^\varkappa (r-2\varkappa+1)_{(r-\varkappa+1)} \Delta_\varkappa = 0. \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

Mit Ausnahme der Jacobi'schen verschwinden also in diesem Falle sämmtliche Elementarcombinanten identisch. Dieses Resultat war übrigens von vornherein zu erwarten, da die invariante Bildung $\left\{ P_\varkappa \,,\, y \right\}_{r-\varkappa}$ bei dem Grade von $P_\varkappa$: $(r-2\varkappa)$ illusorisch ist. Die Differentialgleichung hat also im Falle $n = r$ die einfache Gestalt:

$$\left\{ \overset{r}{A} \,,\, \overset{r}{y} \right\}_r = 0 \,,$$

und man überzeugt sich leicht, dass es keiner weiteren Kriterien dafür bedarf, dass ihre allgemeine Lösung eine ganze rationale Function r-ten Grades ist. Setzen wir nämlich für y die allgemeinste Function r-ten Grades ein:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_r x^r \,,$$

so erhält $\left\{ A, y \right\}_r$ einen von x unabhängigen Wert, welcher sich linear und homogen durch die Coefficienten α ausdrückt. Durch Nullsetzung dieses Ausdrucks wird aus der $(r+1)$-fachen linearen Mannigfaltigkeit eine r-fache herausgehoben. q. e. d. Damit haben wir diesen Specialfall vollständig erledigt und dürfen ihn von allen folgenden Untersuchungen ausschliessen.

Wir kehren jetzt zu Formel (4) zurück und suchen sie weiter zu entwickeln. Mit $G_{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n-r}}$ bezeichnen wir diejenige Determinante aus der Matrix

$$(5)\qquad \begin{Vmatrix} f_{10} & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_{r0} & f_{r1} & f_{r2} & \dots & f_{rn} \end{Vmatrix},$$

welche die der Reihe nach durch die Indices $\nu_0, \nu_1, \dots \nu_{n-r}$ gekennzeichneten Verticalreihen nicht enthält. Führen wir dann die in $\Delta_\nu^{(\varkappa-\nu)}$ angedeutete Differentiation aus, so ergiebt sich nach einigen Umformungen:

$$(6)\quad P_\varkappa = \sum_{\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{n-r}} (\tau_1)_{(n-r-1)} (\tau_2)_{(n-r-2)} \dots (\tau_{n-r-1})_1 (\tau_{n-r})_0$$

$$G_{(n-\tau_0), (n-\tau_1), \dots (n-\tau_{n-r})} \left\{ (-1)^{n-r+\tau_0} \frac{(m-2\varkappa+1)!}{(r-\varkappa)!(m-r-\varkappa)!} \frac{(n-\tau_0)!(m-r-\varkappa+\tau_0)!}{(m+n-r-\varkappa+1)!} \right.$$

$$\left. -(-1)^{(n-r)} \frac{(m-2\varkappa+1)!}{(r-\varkappa)!} \sum_{\nu=0}^{(n-r-1)} (-1)^\nu (\tau_0)_\nu \frac{(n-\nu)!}{(m+n-r-\varkappa+1-\nu)!} \right\},$$

wo sich die Summation auf alle Wertsysteme $(\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{n-r})$ erstreckt, welche an die Bedingungen gebunden sind:

$$\tau_i \geq 0; \quad \sum_{i=0}^{n-r} \tau_i = \frac{(n-r)(n-r+1)}{2} + \varkappa.$$

Permutiren wir jetzt in (6) die Indices $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{n-r}$ auf alle möglichen Weisen unter einander und summiren die daraus entspringenden Gleichungen, so gelangen wir nach beträchtlichen Reductionen zu folgendem Ausdruck, welcher in den Indices symmetrisch gebaut ist:

$$(7)\qquad P_\varkappa = C_\varkappa \sum_{\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{n-r}} \mathop{\Pi\ \Pi}_{\substack{\mu, \nu = 0 \dots (n-r) \\ \mu > \nu}} (\tau_\mu - \tau_\nu) \,.\, A_{\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{n-r}} \,.\, G_{\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{n-r}} \,.$$

Hierin ist zu setzen:

$$C_\varkappa = \frac{(-1)_n}{0!\,1!\,2! \dots (n-r-1)!} \frac{(m-2\varkappa+1)!}{(r-\varkappa)!\,(m-r-\varkappa)!\,(m+n-r-\varkappa+1)!},$$

$$A_{\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{n-r}} = \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^{\tau_i} \frac{\tau_i!\,(m+n-r-\varkappa-\tau_i)!}{(\tau_i-\tau_0)(\tau_i-\tau_1)\dots(\tau_i-\tau_{i-1})(\tau_i-\tau_{i+1})\dots(\tau_i-\tau_{n-r})},$$

während sich die Summation auf alle Wertsysteme $(\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{n-r})$ erstreckt, welche den Bedingungen genügen:

$$(r-\varkappa) \leq \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_{n-r} \leq n.$$

$$\sum_{i=0}^{n-r} \tau_i = \frac{(n+r)(n-r+1)}{2} - \varkappa.$$

Es hat keine Schwierigkeit, an dem hiermit für $P_\varkappa$ gewonnenen Ausdruck unmittelbar die Combinanteneigenschaft nachzuweisen. — Die durch (7) gegebene Darstellung der

Elementarcombinanten enthält eine (n—r+1)-fache Summation und eignet sich daher zur wirklichen Auswertung besonders in den Fällen, wo die Zahl n nur wenig grösser ist als r. Allein für grössere Werte der Differenz (n—r) erweist sie sich als unzweckmässig, und wir leiten deshalb aus (7) noch eine andere Darstellung ab, indem wir an Stelle der Summationsbuchstaben $(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{n-r})$ diejenigen Grössen einführen, welche das System derselben zu dem System der Zahlen (0, 1, ... n) ergänzen. In endgiltiger Fassung erhält dann $P_\varkappa$ die folgende Gestalt:

$$(8) \qquad P_\varkappa = \Gamma_\varkappa \sum_{\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_\varkappa} \prod_{\substack{\mu,\nu=1\ldots\varkappa \\ \mu>\nu}} (\tau_\mu - \tau_\nu) \cdot \frac{B_{\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\varkappa}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\varkappa} \tau_\nu! \, (n-r+\varkappa-\tau_\nu)!} .$$

$$\left\{ 0, 1, \ldots (r-\varkappa-1); \; (r-\varkappa+\tau_1), (r-\varkappa+\tau_2), \ldots (r-\varkappa+\tau_\varkappa) \right\}$$

Hierin ist zu setzen:

$$\Gamma_\varkappa = (n-r)! \, (n-r+1)! \ldots (n-r+\varkappa-1)! \, \frac{(m-2\varkappa+1)!}{(m-\varkappa+1)!} ,$$

$$B_{\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{\varkappa} c_\nu \frac{(r-\nu)!}{(r-\varkappa)!} \, \frac{(n-r+\varkappa)!}{(n-r+\nu)!} \, \frac{(m-\varkappa+1)!}{(m-\varkappa-\nu+1)!} ,$$

wo die Grössen c_ν durch die Gleichung bestimmt sind:

$$\prod_{\nu=1}^{\varkappa} (x-\tau_\varkappa) = \sum_{\nu=0}^{\varkappa} c_\nu \cdot x(x-1)\ldots(x-\varkappa+\nu+1) ;$$

und die Summation erstreckt sich auf alle Wertsysteme $(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\varkappa)$, welche den Bedingungen entsprechen:

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\varkappa , \qquad \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \tau_\nu = \frac{\varkappa \cdot (\varkappa+1)}{2} .$$

Beispielsweise erhalten wir aus (8) für $\varkappa = 2$ und $\varkappa = 3$:

$$P_2 = \frac{(n-r)}{2(m-1)} \Big\{ (r+1) \{0, 1, \ldots (r-3); \; (r-1), r\} - (r-1) \{0, 1, \ldots (r-2); (r+1)\} \Big\} ,$$

$$P_3 = \frac{(n-r)(n-r-1)}{3(m-2)(m-4)} \left\{ \begin{array}{l} (r-2)(r+2) \{0, 1, \ldots (r-3); (r-1); (r+1)\} - \\ (r+1)(r+2) \{0, 1, \ldots (r-4); (r-2), (r-1), r\} - (r-1)(r-2) \{0, 1, \ldots (r-2); (r+2)\} \end{array} \right\}^{*)}$$

Wir ersehen daraus, dass die Combinante P_3 nicht nur für $n = r$, sondern auch für $n = (r+1)$ identisch verschwindet.

Bei der Ableitung der Darstellungen (7) und (8) wurde von der Voraussetzung Gebrauch gemacht, dass n eine ganze positive Zahl ist, dass also die Grössen $f_1, f_2, \ldots f_r$ ganze

*) Auf anderem Wege hat Herr Stroh diese beiden Combinanten erhalten; siehe „Zur Theorie der Combinanten", Mathem. Annalen, Bd. XXII, pag. 402.

rationale Functionen sind. Während Formel (7) auch nur unter dieser Voraussetzung Sinn hat, zeigt sich jedoch Formel (8) von derselben völlig unabhängig. Denn die Anzahl der Summationen $\varkappa$ ist von n frei, und das im Summanden auftretende Facultätzeichen, welches allerdings nur für ganzzahlige positive Werte Bedeutung hat, kann durch die für alle Werte des Arguments definirte Gammafunction ersetzt werden. Offenbar wird daher der in (8) für $P_\varkappa$ gegebene Ausdruck der die Combinanten-Eigenschaft bedingenden partiellen Differentialgleichung Genüge leisten, wie auch die Zahl n beschaffen sein mag, und ist daher ganz allgemein giltig. Daraus folgt aber wieder die Allgemeingiltigkeit der invarianten Darstellung der Differentialgleichung, die wir bereits am Schluss des § 5 hervorgehoben haben.

§ 8.

Andere Darstellungen der Differentialgleichung.

Es erweist sich mitunter als zweckmässig, nicht gerade die Normalform der Differentialgleichung zu Grunde zu legen, sondern verwandte Darstellungen zu benutzen, welche wie jene einer invariantentheoretischen Auffassung fähig sind. Nehmen wir an, dass die Hauptdeterminante der ganzen rationalen Functionen $f_1, f_2, \ldots f_r$ die vollständige ϱ-te Potenz einer ganzen Function ist, und dass durch die $(\varrho-1)$-te Potenz derselben alle Coefficienten der Normalform der durch die f erfüllten Differentialgleichung divisibel sind. Nach Unterdrückung dieses Factors hat dann letztere die Gestalt:

$$(1)\qquad M_0\, y^{(r)} - \varrho\, M'_0\, y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} N_\varkappa\, y^{(r-\varkappa)} = 0\,,$$

wo M_0 und die $N_\varkappa$ bez. vom Grade $\frac{m}{\varrho}$ und $\left(\frac{m}{\varrho} - \varkappa\right)$ sind. Nun stimmen die beiden ersten Glieder von (1) mit den Anfangsgliedern der Covariante $\left\{M_0, y\right\}_r$ überein; wir können daher (1) durch ein Aggregat von Ueberschiebungen ersetzen:

$$(2)\qquad \left\{M_0, y\right\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{M_\varkappa, y\right\}_{r-\varkappa} = 0\,.$$

Hier sind die Functionen $M_\varkappa$ ihrer Bildungsweise gemäss höchstens vom Grade $\left(\frac{m}{\varrho} - \varkappa\right)$, allein die Wiederholung der in § 4 angestellten Ueberlegung lässt unmittelbar erkennen, dass sich der Grad von $M_\varkappa$ auf $\left(\frac{m}{\varrho} - 2\varkappa\right)$ erniedrigt. Ganz analog wie in § 5 schliessen wir hieraus, dass die Coefficienten $M_\varkappa$ Combinanten der Integralfunctionen sind, wenn auch in dieser Eigenschaft nicht mehr eindeutig, sondern ϱ-wertig. Es ist klar, dass wir jetzt wieder die in betreff der Functionen f gemachte Einschränkung aufheben und ihren Grad n eine willkürliche Zahl sein lassen können.

Bekanntlich kann man die Differentialgleichung r-ter Ordnung durch Transformation in eine Form bringen, welche die (r—1)-te Ableitung der abhängigen Variablen nicht enthält, deren Hauptdeterminante also eine Constante und somit vom Grade Null ist. Wollen wir nun die Differentialgleichung

$$(3) \qquad y^{(r)} + q_2 y^{(r-2)} + q_3 y^{(r-3)} + \ldots + q_r y = 0$$

invariant darstellen, so müssen wir, damit $m = r(n-r+1)$ gleich Null wird, der Integralfunction den Grad $n = (r-1)$ erteilen. Die invariante Darstellung würde beginnen mit dem Gliede

$$\left\{ \overset{0}{1}, \overset{r-1}{y.} \right\}_r ,$$

indes ist diese Bildung illusorisch. Um ihr einen Sinn unterzulegen, betrachten wir den Ausdruck

$$\left\{ \overset{r\varepsilon}{\varphi}, \overset{r-1+\varepsilon}{y} \right\}_r ,$$

dessen formale Entwicklung lautet:

$$\frac{\varphi \cdot y^{(r)}}{(r-1+\varepsilon)(r-2+\varepsilon)\ldots(1+\varepsilon)\varepsilon} + \sum_{\varkappa=1}^{r} (-1)^{\varkappa} r_{\varkappa} \frac{\varphi^{(\varkappa)}}{r\varepsilon \cdot (r\varepsilon-1)\ldots(r\varepsilon-\varkappa+1)} \cdot \frac{y^{(r-\varkappa)}}{(r-1+\varepsilon)(r-2+\varepsilon)\ldots(\varkappa+\varepsilon)} .$$

Multipliciren wir dieselbe mit ε, lassen ε zu Null werden und identificiren φ mit 1, so folgt:

$$\lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \left\{ 1, \overset{r-1}{y} \right\}_r = \frac{1}{(r-1)!} y^{(r)} .$$

Es ergiebt sich also, dass die r-te Ableitung einer Function $(r-1)$-ten Grades eine Covariante derselben vom Grade $-(r+1)$ ist.

In Verbindung mit unsern früheren Ergebnissen ziehen wir hieraus den Schluss:

Wenn man y als Function $(r-1)$-ten Grades behandelt und die Differentialgleichung (3) in die Form setzt:

$$(4) \qquad \frac{1}{(r-1)!} y^{(r)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{ p_{\varkappa}, y \right\}_{r-\varkappa} = 0 ,$$

so sind die Coefficienten $p_{\varkappa}$ Combinanten der Integralfunctionen vom Grade $(-2\varkappa)$ und Gewichte $\left[\frac{r \cdot (r-1)}{2} + \varkappa\right]$.*)

Indem wir den Functionen, mit welchen wir zu thun hatten, einen bestimmten Grad beilegten und mit ihnen invariante Processe vornahmen, haben wir implicite immer von der homogenen Auffassung des Arguments im Sinne der binären Invariantentheorie Gebrauch gemacht. Um diese Auffassung auch explicite zum Ausdruck zu bringen, haben wir nur das Argument x durch den Quotienten der homogenen Variabeln $x_2 : x_1$ zu ersetzen und die in Frage kommenden Functionen mit einer Potenz von x_1 zu multipliciren, deren Exponent gleich

*) Hier ist der Coefficient p_3 nichts anderes als Halphen's fundamentale Invariante V; cf. „Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables", Mémoires présentés à l'Académie de l'Institut de France, tome XXVIII, II série, 1884, pag. 127. — Es sei an dieser Stelle hervorgehoben, dass die Theorie der Transformation und der Invarianten der linearen Differentialgleichung an Eleganz gewinnt, wenn man die Gestalt (4) der Gleichung zu Grunde legt, da die Coefficienten $p_{\varkappa}$ sich gegenüber linearer Transformation bereits covariant verhalten.

ihrem Grade ist. Nach Analogie der Algebra werden wir jetzt Functionen des Grades n, welches analytischen Charakters sie auch seien, als Formen der Dimension n bezeichnen, während Formen der Dimension 0 Functionen des Arguments x im gewöhnlichen Sinne sind. Wir sehen so, dass eine lineare Differentialgleichung im allgemeinen nicht Functionen, sondern Formen definirt. — Es braucht nicht erst hervorgehoben werden, dass in dieser homogenen Auffassung der unendlich ferne Punkt keine ausgezeichnete Stellung mehr einnimmt, wie das bei der Interpretation der complexen Variabeln auf der Kugeloberfläche ersichtlich ist.

Beispielsweise erhält die allgemeine lineare Differentialgleichung r-ter Ordnung mit rationalen Coefficienten und ϱ singulären Punkten, deren Integrale sich überall regulär verhalten, wenn ihre Hauptdeterminante constant ist, die folgende Gestalt:

$$(5) \qquad \frac{1}{(r-1)!}\, y^{(r)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{ \frac{F_\varkappa(x_1, x_2)}{[\psi(x_1, x_2)]^\varkappa},\ y \right\}_{r\ \varkappa} = 0,$$

wo $F_\varkappa(x_1, x_2)$ eine ganze rationale Form der Dimension $\varkappa(\varrho-2)$,

$$\psi(x_1, x_2) = \prod_{\nu=1}^{\varrho} (\alpha_{\nu 1}\, x_2 - \alpha_{\nu 2}\, x_1)$$

eine solche der Dimension ϱ ist, und schliesslich y als Form (r—1)-ter Ordnung zu betrachten ist.

§ 9.

Die adjungirte Differentialgleichung.

Um auch nach einer andern Richtung hin die Fruchtbarkeit der gekennzeichneten Auffassung zu prüfen, fragen wir nach der Adjungirten einer in invarianter Form dargestellten Differentialgleichung. Man gelangt zur Adjungirten von

$$(1) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{r} p_\varkappa\, y^{(r-\varkappa)} = 0$$

bekanntlich auf folgendem Wege: Es sei η ein integrirender Factor von (1) und

$$(2) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{r-1} q_\varkappa\, y^{(r-1-\varkappa)} = \text{const.}$$

die demselben entsprechende erste Integralgleichung, so gilt:

$$\eta \cdot \sum_{\varkappa=0}^{r} p_\varkappa\, y^{(r-\varkappa)} = \left\{ \sum_{\varkappa=0}^{r-1} q_\varkappa\, y^{(r-1-\varkappa)} \right\}',$$

woraus hervorgeht:

$$p_\varkappa\, \eta = q'_{\varkappa-1} + q_\varkappa, \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots r)$$

und weiter:

$$(-1)^\varkappa\, q_\varkappa^{(r-\varkappa)} = (-1)^{\varkappa-1}\, q_{\varkappa-1}^{(r-\varkappa+1)} + (-1)^\varkappa\, (p_\varkappa\, \eta)^{(r-\varkappa)},$$

also, wenn über $\varkappa$ von 0 bis r summirt wird:

$$\sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{\varkappa} (p_{\varkappa}\, \eta)^{(r-\varkappa)} = 0.^{*)} \tag{3}$$

Dies ist die sogenannte Adjungirte der Differentialgleichung (1), welche letztere reciprok in demselben Verhältnisse zu (3) steht.

Sind $f_1, f_2, \ldots f_r$ die Integrale von (1) und unter ihnen $f_2, f_3, \ldots f_r$ diejenigen, welche die linke Seite von (2) annulliren, so ist die Gleichung (2) aequivalent mit der folgenden:

$$\begin{vmatrix} y\; y' & \ldots & y^{(r-1)} \\ f_2\; f_2' & \ldots & f_2^{(r-1)} \\ \cdot\;\cdot & \ldots & \cdot \\ f_r\; f_r' & \ldots & f_r^{(r-1)} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} f_1\; f_1' & \ldots & f_1^{(r-1)} \\ f_2\; f_2' & \ldots & f_2^{(r-1)} \\ \cdot\;\cdot & \ldots & \cdot \\ f_r\; f_r' & \ldots & f_r^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

Die Vergleichung beider ergiebt den Wert von q_0 und damit den allgemeinen Ausdruck von $\eta = q_0 : p_0$ durch die Integrale von (1) in der folgenden Gestalt:

$$\eta = \frac{1}{p_0} \frac{\begin{vmatrix} f_1\; f_1' \ldots f_1^{(r-2)} & c_1 \\ f_2\; f_2' \ldots f_2^{(r-2)} & c_2 \\ \cdot\;\cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot \\ f_r\; f_r' \ldots f_r^{(r-2)} & c_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1\; f_1' \ldots f_1^{(r-2)} & f_1^{(r-1)} \\ f_2\; f_2' \ldots f_2^{(r-2)} & f_2^{(r-1)} \\ \cdot\;\cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot \\ f_r\; f_r' \ldots f_r^{(r-2)} & f_r^{(r-1)} \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

Wir legen nunmehr die Differentialgleichung zu Grunde:

$$\sum_{\varkappa=0}^{r} \left\{ M_{\varkappa}, y \right\}_{r-\varkappa} = 0. \tag{5}$$

In derselben werde y als Form n-ten Grades betrachtet, ferner sei $M_1 = 0$, so dass, wenn mit p der im übrigen ebenso wie n willkürliche Grad von M_0 bezeichnet wird,

$$M_0^{\frac{r(n-r+1)}{p}}$$

die Hauptdeterminante der Integralformen darstellt. Unter dieser Annahme stehen die Coefficienten $M_{\varkappa}$ ebenfalls in invarianter Beziehung zu den Integralformen, und $M_{\varkappa}$ hat notwendig den Grad $(p-2\varkappa)$. Endlich hat der integrirende Factor von (5) zufolge (4) den Grad:

$$\nu = (r-1)(n-r+2) - r(n-r+1) - p = (2r-n-2-p),$$

*) Cf. Jacobi, „Ueber die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abel'schen und höhern Transcendenten", Gesammelte Werke (herausgegeben von K. Weierstrass auf Veranlassung der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften), Bd. II, pag. 127.

oder es ist

$$(n+\nu) = (2r-2-p). \tag{6}$$

Entwickeln wir jetzt die Gleichung (5), so lautet dieselbe:

$$\sum_{\varkappa=0}^{r} \sum_{\lambda=0}^{r-\varkappa} (-1)^{\lambda} (r-\varkappa)_{\lambda} \frac{(n-r+\varkappa+\lambda)!}{n!} M_{\varkappa\lambda} y^{(r-\varkappa-\lambda)} = 0,$$

und ihre Identification mit (1) liefert gemäss (3) die zu (5) adjungirte Differentialgleichung:

$$\sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{\varkappa} \sum_{\lambda=0}^{r-\varkappa} (r-\varkappa)_{\lambda} \frac{(n-r+\varkappa+\lambda)!}{n!} (M_{\varkappa\lambda}\, \eta)^{(r-\varkappa-\lambda)} = 0. \tag{7}$$

Hier ist nun

$$(M_{\varkappa\lambda}\, \eta)^{(r-\varkappa-\lambda)} = \sum_{\mu=\lambda}^{r-\varkappa} (r-\varkappa-\lambda)_{\mu-\lambda} \frac{(p-2\varkappa-\lambda)!}{(p-2\varkappa-\mu)!} \frac{\nu!}{(\nu-r+\varkappa+\mu)!} M_{\varkappa\mu}\, \eta_{(r-\varkappa-\mu)},$$

also, wenn man die Reihenfolge der Summationen vertauscht:

$$\sum_{\lambda=0}^{r-\varkappa} (r-\varkappa)_{\lambda} \frac{(n-r+\varkappa+\lambda)!}{n!} (M_{\varkappa\lambda}\, \eta)^{(r-\varkappa-\lambda)} = \tag{8}$$

$$\sum_{\mu=0}^{r-\varkappa} (r-\varkappa)_{\mu} \frac{1}{n!\,(p-2\varkappa-\mu)!} \frac{\nu!}{(\nu-r+\varkappa+\mu)!} M_{\varkappa\mu}\, \eta_{(r-\varkappa-\mu)} \cdot S_{\mu},$$

wo

$$S_{\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\mu} \mu_{\lambda} \cdot (n-r+\varkappa+\lambda)!\, (p-2\varkappa-\lambda)!$$

ist. Wertet man S_{μ} vermittelst des Euler'schen Integrals aus und zieht aus (6) den Wert von ν heran, so ergiebt sich:

$$S_{\mu} = (-1)^{\mu} \frac{(\nu-r+\varkappa+\mu)!}{(\nu-r+\varkappa)!} (n-r+\varkappa)!\, (p-2\varkappa-\mu)!,$$

und (8) erhält die Gestalt:

$$\sum_{\mu=0}^{r-\varkappa} (-1)^{\mu} (r-\varkappa)_{\mu} \cdot \frac{(n-r+\varkappa)!}{n!} \frac{\nu!}{(\nu-r+\varkappa)!} \cdot M_{\varkappa\mu}\, \eta_{(r-\varkappa-\mu)},$$

welcher Ausdruck nichts anderes darstellt als

$$\frac{(n-r+\varkappa)!}{n!} \frac{\nu!}{(\nu-r+\varkappa)!} \cdot \left\{M_{\varkappa}, \eta\right\}_{r-\varkappa}.$$

Mit einer geringen Modification zum Zweck grösserer Symmetrie können wir unser Resultat so aussprechen:

Die zu der Differentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{r} \frac{n!}{(n-r+\varkappa)!} \left\{M_{\varkappa}, y\right\}_{r-\varkappa} = 0$$

adjungirte Differentialgleichung lautet:

$$\sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{\varkappa} \frac{\nu!}{(\nu-r+\varkappa)!} \left\{ M_{\varkappa}, \eta \right\}_{r-\varkappa} = 0;$$

wobei y, η, $M_{\varkappa}$ bez als Formen n-ter, ν-ter, $(p-2\varkappa)$-ter Dimension zu behandeln sind, und $(n+\nu) = (2r-2-p)$, $M_1 = 0$ ist.

Die Reciprocität dieser beiden Differentialgleichungen sowie ihre Zusammengehörigkeit unter dem Gesichtspunkte der Invariantentheorie springt hier unmittelbar in die Augen.

Setzen wir speciell $n = (r-1)$, $M_0 = 1$, also $p = 0$ und damit $\nu = (r-1)$, so erhalten wir folgendes Theorem:

Die zu der Differentialgleichung

$$\frac{1}{(r-1)!} y^{(r)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{ p_{\varkappa}, y \right\}_{r-\varkappa} = 0$$

adjungirte Differentialgleichung hat die Gestalt:

$$\frac{1}{(r-1)!} \eta^{(r)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} (-1)^{\varkappa} \left\{ p_{\varkappa}, \eta \right\}_{r-\varkappa} = 0;$$

wobei y und η Formen von der Dimension $(r-1)$, die $p_{\varkappa}$ von der Dimension $(-2\varkappa)$ sind. Ist

$$y = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_r f_r$$

das allgemeine Integral der ursprünglichen Differentialgleichung, so ist dasjenige der adjungirten:

$$\eta = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & \ldots & f_1^{(r-2)} & c_1 \\ f_2 & f_2' & \ldots & f_2^{(r-2)} & c_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ f_r & f_r' & \ldots & f_r^{(r-2)} & c_r \end{vmatrix} = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \ldots + c_r \varphi_r .$$

Interpretirt man die Functionen f als homogene Punktcoordinaten eines Gebildes erster Stufe im Raume von $(r-1)$ Dimensionen, so stellen sich die φ als Ebenencoordinaten desselben Gebildes dar.

Endlich ziehen wir aus diesen Ergebnissen den Schluss:

Ist eine lineare Differentialgleichung r-ter Ordnung sich selbst adjungirt, so hat sie die Gestalt:

$$\left\{ \overset{p}{M_0}, \overset{n}{y} \right\}_r + \left\{ \overset{p-4}{M_2}, y \right\}_{r-2} + \left\{ \overset{p-8}{M_4}, y \right\}_{r-4} + \left\{ \overset{p-12}{M_6}, y \right\}_{r-6} + \ldots = 0,$$

und zwar ist $p = -2(n-r+1)$, also $M_0^{-\frac{r}{2}}$ die Hauptcombinante ihrer Integrale. Ist letztere constant, so lautet die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{(r-1)!}\, y^{(r)} + \left\{ \overset{-4}{p_2},\ \overset{r-1}{y} \right\}_{r-2} + \left\{ \overset{-8}{p_4},\ y \right\}_{r-4} + \left\{ \overset{-12}{p_6},\ y \right\}_{r-6} + \ldots = 0.^{*)}$$

§ 10.

Die Kriterien in invarianter Darstellung.

Nachdem wir uns über die allgemeinen Eigenschaften der invarianten Darstellung der linearen Differentialgleichung orientirt haben, kehren wir nunmehr zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück und betrachten die Kriterien, welche wir in § 2 für die Eindeutigkeit der Integrale erhalten haben, unter dem neu gewonnenen Gesichtspunkte.

Zuvörderst bemerken wir: Leitet man aus einer Differentialgleichung durch lineare Transformation der homogenen Argumente eine andere ab, so besitzt letztere zugleich mit der ursprünglichen eine eindeutige allgemeine Lösung, und umgekehrt. Die Kriterien, welche die Eindeutigkeit der Integrale der vorgelegten Gleichung bedingen, sind daher auch für die abgeleitete notwendig und hinreichend, und folglich äquivalent mit den Kriterien, welche der letzteren unmittelbar angehören. Das heisst:

Das System der Kriterien, welche die Eindeutigkeit des allgemeinen Integrals einer linearen Differentialgleichung bedingen, steht zu derselben in invarianter Beziehung.

Wir erhalten nun das Resultat der Transformation der Gleichung

$$(1) \qquad \left\{ A, y \right\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{ P_\varkappa, y \right\}_{r-\varkappa} = 0,$$

zufolge ihres invarianten Charakters, wenn wir die Grössen $A, P_\varkappa$ darin durch ihre Transformirten ersetzen. Da aber das System der aus letzteren gebildeten Kriterien äquivalent ist mit dem aus den ursprünglichen Formen gebildeten, so schliessen wir weiter: Das System der Kriterien, welche durch die Elementarcombinanten dargestellt werden, steht zu denselben in invarianter Beziehung. Es wird sich jetzt darum handeln, diese Beziehung, welche sich infolge des Auftretens mehrerer Bedingungen und zwar in der Form von Congruenzen von vornherein nicht angeben lässt, genauer zu präcisiren. Zuvor werden wir jedoch, um eine sichere Anschauung über die Gestaltung des allgemeinen Resultats zu gewinnen, die ersten jener Bedingungen vollständig auf die Gleichung (1) übertragen. Zu dem Zweck identificiren wir dieselbe mit der folgenden:

$$(2) \qquad A\, y^{(r)} - A'\, y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} D_\varkappa\, y^{(r-\varkappa)} = 0,$$

für welche nach § 2 die Kriterien lauten:

$$(3) \qquad A'(D_\varkappa' + D_{\varkappa+1}) - (A'' - D_2)\, D_\varkappa \equiv 0 \text{ mod. } A; \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

dann ist

---

*) Eine andere Form für die sich selbst adjungirte Differentialgleichung hat Jacobi in der oben citirten Abhandlung pag. 134 aufgestellt.

$$(4)\qquad D_\varkappa = (-1)^\varkappa \frac{(n-r+\varkappa)!}{(n-r)!} \left\{ r_\varkappa A_\varkappa + \sum_{\lambda=2}^{\varkappa} (-1)^\lambda (r-\lambda)_{\varkappa-\lambda} P_{\lambda, \varkappa-\lambda} \right\};$$

und die erste der Congruenzen (3):

$$A'(D_2'+D_3) - (A''-D_2) D_2 \equiv 0 \text{ mod. } A$$

geht durch Einsetzen dieser Ausdrücke, wenn man noch geeignete Multipla von A zur linken Seite hinzufügt, über in:

$$(5)\qquad r^2(r^2-1)(n-r) \left\{A, A\right\}_4 + 24r(n-2r+1)\left\{A, P_2\right\}_2 + 24r(n-r+3)\left\{A, P_3\right\}_1$$
$$-24(n-r+2) P_2^2 \equiv 0 \text{ mod. } A, = A.\,\Phi.$$

Hier tritt also die invariante Beziehung der Congruenz zu den Grössen A, $P_\varkappa$ unmittelbar in Evidenz. Indes ist es nicht möglich, auch die zweite Bedingung:

$$A'(D'_3+D_4)-(A''-D_2) D_3 \equiv 0 \text{ mod. } A$$

für sich durch ein Aggregat von Simultancovarianten jener Formen darzustellen; erst mit Heranziehung der durch die Congruenz (5) definirten Form Φ gelingt die Durchführung, und zwar erhält man:

$$(6)\qquad r(r-2)(n-r+1)\left\{A, \Phi\right\}_1 - 8r(r-2)(r+2)(n-r-1)(rn-r^2+r-1)\left\{A, P_2\right\}_3$$
$$+72r(n-2r+1)(rn-r^2+r-2)\left\{A, P_3\right\}_2 + 48r(n-r+4)(rn-r^2+r-4)\left\{A, P_4\right\}_1$$
$$-48(n-r+2)(rn-r^2+r-4) P_2 . P_3 \equiv 0 \text{ mod. } A.$$

Es hat jetzt keine Schwierigkeit, aus der Form, welche wir für diese beiden Congruenzen gefunden haben, das allgemeine Bildungsgesetz der Kriterien zu erschliessen und den Beweis für dasselbe zu erbringen. Wir knüpfen dazu an die in § 3 abgeleiteten Identitäten an, welche den Congruenzen zu Grunde liegen. Dieselben lauten:

$$(7)\qquad (-1)^\varrho \left\{A'(D'_\varrho + D_{\varrho+1}) - (A''-D_2) D_\varrho\right\} = A.\,\Psi_\varrho, \qquad (\varrho = 2, 3, \ldots r)$$

wo

$$\Psi_\varrho = \left| f_i\, f_i' \ldots f_i^{(r-\varrho-1)}\, f_i^{(r-\varrho+1)} \ldots f_i^{(r-2)}\, f_i^{(r)}\, f_i^{(r+1)} \right| \qquad (i = 1, \ldots r)$$

gesetzt ist. Die linke Seite von (7) stellt sich vermöge der Relationen (4) als eine homogene quadratische Function der A, $P_\varkappa$ und ihrer Ableitungen dar, deren einzelne Glieder gebildet sind von dem Product einer Ableitung einer der Grössen A, $P_\varkappa$ mit einer Ableitung von A oder P_2, in der Art, dass der Grad eines solchen Gliedes $\leq (2m-\varrho-2)$ ist. Um nun den Ausdruck Ψ_ϱ, welcher den Grad $(m-\varrho-2)$ hat, auf eine geeignete Form zu bringen, benutzen wir ein von Herrn Hilbert*) aufgestelltes Theorem, welches die Entwicklung eines homogenen isobaren Ausdrucks in eine Reihe von Derivirten von Covarianten angiebt. Diesem Satze zufolge haben wir

$$(8)\qquad \Psi_\varrho = \overset{0}{\Psi}_\varrho + \overset{1}{\Psi}_\varrho{}' + \overset{2}{\Psi}_\varrho{}'' + \ldots + \overset{\varrho+2}{\Psi}_\varrho{}^{(\varrho+2)},$$

wo $\overset{\varkappa}{\Psi}_\varrho$ eine gewisse Combinante der f von der Ordnung $(m-2\varrho-4+2\varkappa)$ darstellt. Bezeichnen wir speciell die — im allgemeinen von $P_{\varrho+2}$ verschiedene — Combinante

*) Siehe Hilbert, l. c. pag. 19–20.

$$\overset{0}{\Psi}_\varrho \text{ mit } \Phi_\varrho,$$

so zeigt eine genauere Untersuchung, dass sich die Combinante $\overset{\varkappa}{\Psi}_\varrho$ linear aus den beiden Combinanten $\Phi_{\varrho-\varkappa}$ und $P_{\varrho-\varkappa+2}$ zusammensetzt. Demnach stellt sich Ψ_ϱ dar als eine Combinante Φ_ϱ, vermehrt um ein Aggregat der Grössen:

$$A_{\varrho+2},\ P_{2,\varrho},\ P_{3,\varrho-1}, \ldots P_{\varrho+1,1};\ \Phi_{2,\varrho-2},\ \Phi_{3,\varrho-3}, \ldots \Phi_{\varrho-1,1}.$$

Schaffen wir jetzt in (7) ausser dem Product $A.\Phi_\varrho$ Alles auf die linke Seite, so muss dieselbe zwar eine Combinante der f darstellen, aber, da die Combinanten $\Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_{\varrho-1}$ von den P nicht unabhängig sind, so darf man nicht schliessen, dass sie sich zugleich durch ein Aggregat von Simultancovarianten der P und Φ darstellen lässt. Wenden wir indes auf diesen Ausdruck wieder das eben benutzte Theorem des Herrn Hilbert an, so ergiebt sich:

$$(9) \qquad A.\Phi_\varrho = \overset{0}{V}_\varrho + \overset{1}{V}_\varrho{}' + \overset{2}{V}_\varrho{}'' + \ldots + \overset{\varrho+2}{V}_\varrho{}^{(\varrho+2)},$$

wo $\overset{\varkappa}{V}_\varrho$ eine quadratische Simultancovariante der P und Φ von der Ordnung $(2m-2\varrho-4+2\varkappa)$ bedeutet. Man überzeugt sich nun leicht, dass eine Identität der Form (9) in den f nur dann Bestand haben kann, wenn die Grössen $\overset{1}{V}_\varrho, \overset{2}{V}_\varrho, \ldots \overset{\varrho+2}{V}_\varrho$ identisch verschwinden. In der That geschieht das auf Grund der Relationen, welche die Grössen $\Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_{\varrho-1}$ mit den P verbinden. — Ziehen wir jetzt in Betracht, in welcher Verbindung die P und Φ in $\overset{0}{V}_\varrho$ auftreten, so erhalten wir folgende endgiltige Darstellung des Systems der Kriterien:

$$(10) \qquad a_{\varrho 0}\left\{A, A\right\}_{\varrho+2} + \bar{a}_{\varrho 2}\left\{A, P_2\right\}_\varrho + \sum_{\varkappa=3}^{\varrho+1} a_{\varrho\varkappa}\left\{A, P_\varkappa\right\}_{\varrho-\varkappa+2}$$
$$+\sum_{\varkappa=2}^{\varrho} b_{\varrho\varkappa}\left\{P_2, P_\varkappa\right\}_{\varrho-\varkappa} + \sum_{\varkappa=2}^{\varrho} c_{\varrho\varkappa}\left\{A, \Phi_\varkappa\right\}_{\varrho-\varkappa} = 0. \qquad (\varrho = 2, 3, \ldots r)$$

Die rechnerische Durchführung des angedeuteten Verfahrens liefert für die in (10) auftretenden numerischen Constanten folgende Werte:

$$a_{\varrho\varkappa} = (-1)^\varkappa \frac{(r-\varkappa)_{(\varrho-\varkappa+1)}}{(r-\varrho)} \frac{m!}{(m-\varrho+\varkappa-2)!} \frac{(2m-2\varrho-3)!}{(2m-\varrho-\varkappa-2)!} \frac{1}{(m-1)}.$$
$$\left\{(m-1)\left[\varrho(r+1)(n-r)+\varkappa^2-\varkappa(m+1)\right] - \frac{(\varrho+\varkappa)(\varrho-\varkappa+1)}{2}(r+1)(n-r)\right\}. \ (\varkappa = 0, 3, 4, \ldots(\varrho+1))$$

$$\bar{a}_{\varrho 2} = (n-r+1)(n-r+2)\, r_\varrho \frac{m!}{(m-\varrho)!} \frac{(2m-2\varrho-3)!}{(2m-\varrho-3)!}$$
$$+(-1)^{\varrho+1}(n-r+1)(n-r+2)\, r_\varrho \frac{(m-4)!}{(m-\varrho-4)!} \frac{(2m-2\varrho-3)!}{(2m-\varrho-3)!}$$
$$+\frac{(r-2)_{\varrho-1}}{(r-\varrho)} \frac{m!}{(m-\varrho)!} \frac{(2m-2\varrho-3)!}{(2m-\varrho-4)!} \frac{1}{(m-1)} \left\{(m-1)\left[\varrho(r+1)(n-r)-2(m-1)\right] - \frac{(\varrho+2)(\varrho-1)}{2}(r+1)(n-r)\right\}.$$

$$b_{\varrho\varkappa} = (-1)^{\varkappa+1} (n-r+1)(n-r+2)(r-\varkappa)_{\varrho-\varkappa} \frac{(m-4)!}{(m-\varrho+\varkappa-4)!} \frac{(2m-2\varrho-3)!}{(2m-\varrho-\varkappa-3)!}. \quad (\varkappa = 2, 3, \ldots \varrho)$$

$$c_{\varrho\varkappa} = (r-\varkappa)_{\varrho-\varkappa} \frac{m!}{(m-\varrho+\varkappa)!} \frac{(2m-2\varrho-3)!}{(2m-\varrho-\varkappa-3)!}. \quad (\varkappa = 2, 3, \ldots \varrho)$$

Wir sprechen dieses Resultat so aus:

Damit das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) eine ganze rationale Form ist, ist erforderlich und hinreichend, dass die durch die Gleichungen (10) der Reihe nach definirten Grössen $\Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_r$, welche Combinanten des Systems der Integrale sind, als **ganze** Formen hervorgehen. Dabei ist vorausgesetzt, dass A nur einfache Factoren besitzt; andernfalls bleiben die Bedingungen zwar notwendig, verlieren aber ihren erschöpfenden Charakter.

Bei dieser Darstellung der Kriterien ist noch ein Punkt hervorzuheben. Wie wir gesehen haben, geht aus der Forderung, dass sich die Integrale in der Umgebung des unendlich fernen Punktes wie ganze rationale Functionen verhalten, als notwendige Folge die Graderniedrigung der Coefficienten in der invarianten Form der Differentialgleichung hervor. Indem wir also im Vorigen von letzterer ausgingen, haben wir damit bereits einen Teil der Bedingungen vorweg erfüllt, sodass die Kriterien in der Gestalt, welche wir ihnen zuletzt erteilten, zwar den formal einfachsten und dem Gegenstande conformsten, aber nicht den bündigsten Ausdruck gefunden haben. Dies zeigt uns auch die Zählung der verfügbaren Constanten. Wie wir in § 6 erwähnt haben, sind bei willkürlicher Annahme von A die Formen $P_2, P_3, \ldots P_r$ in endlichdeutiger Weise bestimmt. Dieselben liefern

$$\sum_{\varkappa=2}^{r} (m-2\varkappa+1) = (r-1)\,m - (r-1)\,(r+1)$$

Constanten, welche (r—1) Congruenzen mod. A, also (r—1) m Bedingungen erfüllen. Es werden demnach (r^2-1) von den Bedingungen, in welche das System der Kriterien zerfällt, zugleich mit den übrigen befriedigt sein.

§ 11.

Die lineare inhomogene Differentialgleichung.

Die Frage nach den Bedingungen, unter denen das vollständige Integral der inhomogenen Differentialgleichung

$$\text{(1)} \qquad D(y) = A\, y^{(r)} - A'\, y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} D_\varkappa\, y^{(r-\varkappa)} = B$$

eine ganze rationale Function ist, lässt sich auf die im Bisherigen behandelte Aufgabe zurückführen, indem man die homogene Differentialgleichung (r+1)-ter Ordnung untersucht, welcher die Integrale von (1) Genüge leisten. Die Differentiation von (1) ergiebt:

$$A\, y^{(r+1)} - (A''-D_2)\, y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} (D'_\varkappa + D_{\varkappa+1})\, y^{(r-\varkappa)} = B',$$

woraus in Verbindung mit (1) folgt:

$$(2) \qquad B\, y^{(r+1)} - B'\, y^{(r)} + \sum_{\varkappa=2}^{r+1} E_\varkappa\, y^{(r+1-\varkappa)} = 0,$$

indem

$$(3) \qquad \begin{cases} B\,(A''-D_2) - B'\,A' = -A\,E_2 \\ B\,(D'_{\varkappa-1}+D_\varkappa) - B'\,D_{\varkappa-1} = A\,E_\varkappa \end{cases} \qquad (\varkappa = 3, 4, \ldots (r+1))$$

gesetzt ist. Da (2) die Normalform hat, so ist zunächst erforderlich, dass die durch (3) definirten Coefficienten $E_2, E_3, \ldots E_{r+1}$ ganze Functionen sind. Um nun durch Anwendung unserer früheren Resultate auf (2) hinreichende Kriterien zu erhalten, müssen wir die Voraussetzung treffen, dass B nur einfache Factoren besitzt. Dann genügt die Forderung, dass

$$(4) \qquad B'\,(E'_\varkappa+E_{\varkappa+1}) - (B''-E_2)\,E_\varkappa \equiv 0 \text{ mod. } B \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots (r+1))$$

erfüllt sein soll. Entwickeln wir die erste dieser Congruenzen unter Benutzung von (3), so hebt sich B heraus, und es geht die Congruenz mod. A hervor:

$$(5) \qquad B'\,(A'''-2D_2'-D_3) - (B''-E_2)\,(A''-D_2) \equiv 0 \text{ mod. } A.$$

Andrerseits folgt aus der Identität

$$B\,(A''-D_2) - B'\,A' + A\,E_2 = 0$$

durch Differentiation:

$$B\,(A'''-D_2') - B'\,D_2 - B''\,A' + A'\,E_2 \equiv 0 \text{ mod. } A.$$

Multipliciren wir diese Congruenz mit B' und wenden (3) in geeigneter Weise an, so folgt:

$$B\,\Big\{B'\,(A'''-2D_2'-D_3) - (B''-E_2)\,(A''-D_2)\Big\} \equiv 0 \text{ mod. } A.$$

Setzen wir also voraus, dass A und B teilerfremd sind, so zeigt sich, dass die Bedingung (5) auf Grund von (3) bereits erfüllt ist. In ganz derselben Weise findet man, dass auch die weiteren Congruenzen (4) unter derselben Annahme keine neuen Bedingungen mehr enthalten. Wir haben so den Satz gewonnen:

I. Damit das allgemeine Integral von (1) sich durch eine ganze rationale Function darstellt, ist notwendig und hinreichend das Bestehen der Congruenzen:

$$\begin{cases} B\,(A''-D_2) - B'\,A' \equiv 0 \text{ mod. } A, \\ B\,(D'_\varkappa + D_{\varkappa+1}) - B'\,D_\varkappa \equiv 0 \text{ mod. } A, \end{cases} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

— vorausgesetzt, dass B nur einfache Factoren und mit A keinen gemeinsamen Teiler besitzt. — Es ist selbstverständlich, dass dabei $D_\varkappa$ den Grad $(m-\varkappa)$ haben muss, wobei m der Grad von A ist, während der Grad von B keiner Beschränkung unterliegt. — Es ist nur eine andere Form dieses Satzes, wenn wir sagen:

I'. Es ist notwendig und hinreichend, dass die aus (1) abgeleitete homogene Differentialgleichung (r+1)-ter Ordnung (2) in der Normalform ganze Functionen zu Coefficienten hat.

Indem wir die hier gemachten Annahmen beibehalten, schliessen wir weiter:

II. Wenn die Differentialgleichung (2) mit ganzen Coefficienten eine erste Integralgleichung (1) besitzt, deren Coefficienten ebenfalls ganze Functionen sind, so ist ihre allgemeine Lösung eine ganze rationale Function.

Hieraus entnehmen wir ferner unmittelbar:

III. Besitzt die Differentialgleichung (2) r ganze rationale Integrale, deren Hauptdeterminante A keinen Teiler mit B gemein hat, so ist auch das $(r+1)$-te Integral eine ganze rationale Function.

Fügen wir den Voraussetzungen des Satzes I noch die weitere hinzu, dass auch A nur einfache Factoren besitzt, so ergiebt sich sofort die Aequivalenz der daselbst angegebenen Congruenzen mit den folgenden:

$$(6) \quad \begin{cases} B(A''-D_2) - B'A' \equiv 0 \text{ mod. } A, \\ A'(D_\varkappa' + D_{\varkappa+1}) - (A''-D_2)D_\varkappa \equiv 0 \text{ mod. } A, \end{cases} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

von denen die letzteren die Kriterien für die homogene Gleichung $D(y) = 0$ darstellen. Indem wir dieses Resultat auf die invariante Form der Differentialgleichung übertragen, gelangen wir zu folgendem Theorem:

IV. Die homogene Differentialgleichung

$$P(y) \equiv \left\{\overset{m}{A}, \overset{n}{y}\right\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{\overset{m-2\varkappa}{P_\varkappa}, y\right\}_{r-\varkappa} = 0$$

werde durch eine ganze rationale Form n-ter Ordnung integrirt; damit dies auch für die inhomogene Gleichung

$$P(y) = B,$$

wo B eine Form der Ordnung $(r+1)(n-r)$ ist, stattfindet, ist notwendig und hinreichend das Bestehen der Congruenz:

$$r(r+1)(n-r)\left\{A, B\right\}_2 - 2(n-r+2)B.P_2 \equiv 0 \text{ mod. } A;$$

— vorausgesetzt, dass A und B nur einfache Factoren besitzen und teilerfremd sind. — Ist speciell $P_2 = 0$, so reducirt sich diese Bedingung auf die folgende:

$$\left\{A, B\right\}_2 \equiv 0 \text{ mod. } A.$$

§ 12.

Nochmals Kriterien für die homogene Differentialgleichung.

Wenn die Integrale der inhomogenen Differentialgleichung

$$(1) \qquad D(y) = B$$

ganze rationale Functionen sind, so sind es auch die Integrale der homogenen Gleichung

$$(2) \qquad D(y) = 0,$$

so dass man die Kriterien der ersteren auf die letztere übertragen kann. Wenn wir die Annahme machen, dass die Coefficienten in $D(y)$ keinen gemeinsamen Teiler haben, so existiren stets ganze Functionen u der Art, dass die Function

$$B = D(u)$$

weder mehrfache Factoren noch einen Teiler mit A gemeinsam besitzt, also die Bedingungen des Satzes I des vorigen Paragraphen erfüllt. Setzen wir nun diesen Ausdruck $B = D(u)$ in die Congruenzen jenes Satzes ein, so werden dieselben sicher erfüllt sein, wenn wir darin die Coefficienten der einzelnen Ableitungen von u congruent Null annehmen. Wir erhalten auf diese Weise:

$$(3) \qquad \left.\begin{cases} A'(D_\varkappa'+D_{\varkappa+1})-(A''-D_2)\, D_\varkappa \equiv 0 \\ D_\lambda(D_\varkappa'+D_{\varkappa+1})-(D_\lambda'+D_{\lambda+1})\, D_\varkappa \equiv 0 \end{cases}\right\} \text{mod. } A. \qquad (\varkappa, \lambda = 2, 3, \ldots r)$$

Diese Bedingungen sind also für (2) sicher hinreichend, aber sie sind offenbar auch notwendig. Man entnimmt hieraus leicht das folgende Theorem:

Wenn der Coefficient A der Differentialgleichung

$$A\, y^{(r)} - A'\, y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} D_\varkappa\, y^{(r-\varkappa)} = 0$$

in $x = a$ eine ϱ-fache Wurzel hat, und die zu diesem Punkte gehörende determinirende Fundamentalgleichung die Wurzeln $(0, 1, \ldots (r-\varrho-1); (r-\varrho+1), \ldots r)$ besitzt, so ist für das Wegfallen der Logarithmen in der Entwicklung des allgemeinen Integrals in der Umgebung von $x = a$ notwendig und hinreichend das Bestehen der Congruenzen:

$$(4) \qquad \begin{cases} A'(D_\varrho'+D_{\varrho+1})-(A''-D_2)\, D_\varrho \equiv 0 \text{ mod. } (x-a)^\varrho \\ D_\varrho(D_\varkappa'+D_{\varkappa+1})-D_\varkappa(D_\varrho'+D_{\varrho+1}) \equiv 0 \text{ mod. } (x-a)^\varrho. \ (\varkappa = 2, \ldots (\varrho-1), (\varrho+1) \ldots r) \end{cases}$$

Es ist merkwürdig, dass auch in diesem allgemeinern Falle, welcher den in § 2 behandelten ergänzt, die Bedingungen sich in so einfacher Weise darstellen lassen. —

Wir betrachten im Folgenden die schon im § 8 erwähnte Klasse von Differentialgleichungen, welche in der Normalform durch die Quadratwurzel ihrer Hauptdeterminante divisibel sind. Eine solche hat in invarianter Darstellung die Form:

$$(5) \qquad \left\{ M_0, y \right\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{ M_\varkappa, y \right\}_{r-\varkappa} = 0,$$

wobei jetzt y und die $M_\varkappa$ Formen der bez. Ordnung n und $\left[\frac{r(n-r+1)}{2} - 2\varkappa\right]$ sind, und laute aufgelöst:

$$(6) \qquad M_0\, y^{(r)} - 2 M_0'\, y^{(r-1)} + \sum_{\varkappa=2}^{r} N_\varkappa\, y^{(r-\varkappa)} = 0.$$

Wir setzen voraus, dass M_0 nur einfache Factoren besitzt. Die Wurzeln der zu einem Wurzelpunkte von M_0 gehörenden determinirenden Fundamentalgleichung sind dann bereits ganze positive Zahlen, nämlich

$$0, 1, 2, \ldots (r-2); (r+1),$$

so dass nur die Bedingungen für das Fortfallen der Logarithmen aufzustellen sind. Dieselben sind für (6), wie sich nach Analogie der in § 1 und 2 verwandten Methoden leicht ergiebt:

$$(7) \qquad N_\varkappa \left\{2M_0' M_0''' - 6M_0''^2 - 2M_0' N_2' - M_0' N_3 + 5M_0'' N_2 - N_2^2\right\}$$
$$- 2M_0' \left\{M_0' (N_\varkappa'' + 2N_{\varkappa+1}' + N_{\varkappa+2}) - (3M_0'' - N_2)(N_\varkappa' + N_{\varkappa+1})\right\} \equiv 0 \text{ mod. } M_0.$$
$$(\varkappa = 2, 3, \ldots r)$$

Es braucht kaum gesagt zu werden, dass diese Kriterien, auf die Differentialgleichung (5) übertragen, sich durch deren Coefficienten in invarianter Form darstellen lassen müssen; indes ist diese Darstellung recht complicirt, und wir beschränken uns daher darauf, die erste in (7) enthaltene Congruenz zu transformiren. Dieselbe geht über in folgende:

$$(8) \qquad 3r^3(r-1)(r+2)(n-r-1)(n-2r) \begin{vmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} \\ M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{02} & M_{03} & M_{04} \end{vmatrix} +$$
$$2r^2\left[(r^2+2r-12)(n-r)^2+16rn-29r^2-4n-2r+16\right]\left\{M_0, (M_0, M_2)_3\right\}_1$$
$$-12r(n-r+2)(rn-r^2-6n+13r-2)M_2\left\{M_0, M_2\right\}_2$$
$$+r^2\left[(r^2+2r-6)(n-r)^2+10rn-17r^2-4n+4r+4\right]M_2\left\{M_0, M_0\right\}_4$$
$$-48(n-r+2)^2 M_2^3 - 36r^2(n-r+3)(n-2r)\left\{M_0, (M_0, M_3)_2\right\}_1$$
$$+72r(n-r+2)(n-r+3)M_2\left\{M_0, M_3\right\}_1 + 12r^2(n-r+3)(n-r+4)M_4\left\{M_0, M_0\right\}_2 \equiv 0 \text{ mod. } M_0.$$

§ 13.
Die Differentialgleichungen der niederen Ordnungen.

Wir gehen nunmehr dazu über, die Ergebnisse unserer allgemeinen Theorie, welche in ihren Grundzügen dargelegt ist, auf die Differentialgleichungen der ersten Ordnungen zur Anwendung zu bringen, deren Hauptdeterminante nur einfache Factoren enthält. Wir haben dabei nichts anderes zu thun, als die allgemeinen Resultate des § 10 entsprechend zu specialisiren und kurz zusammenzufassen. Da diese Operationen elementarer Natur sind, wenn auch mitunter mit Weitläufigkeiten verbunden, so beschränken wir uns auf die Angabe der Resultate.

Was die inhomogene Differentialgleichung anbetrifft, so wird das Problem derselben durch den Satz IV des § 11 in so einfacher Weise absolvirt, dass eine Erläuterung an einzelnen Beispielen überflüssig erscheint.

Des kürzeren Ausdrucks halber werden wir die zu einer Differentialgleichung gehörenden Kriterien durch das Zeichen $\cong$ einleiten.

Wir beginnen mit der inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\text{I.} \qquad \left\{\overset{n}{f}, \overset{n}{y}\right\}_1 = \overset{2(n-1)}{\varphi}. \qquad \cong: \left\{f, \varphi\right\}_2 \equiv 0 \text{ mod. } f.$$

Legen wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Form zu Grunde:

$$\text{II.} \qquad \left\{\overset{2(n-1)}{A}, \overset{n}{y}\right\}_2 - \frac{(n-2)}{2(2n-3)} \overset{2(n-3)}{P} . y = 0,$$

so haben A und P, als Combinanten der Integralformen φ und ψ aufgefasst, die Werte:

$$A = \{\varphi, \psi\}_1, \qquad P = \{\varphi, \psi\}_3.$$

$$\cong: 2(2n-3)^2 \{A, A\}_4 - 4(n-3)(2n-3)\{A, P\}_2 - n(n-2) P^2 \equiv 0 \text{ mod. } A.$$

Diese Congruenz wird für $n = 3$ und $n = 4$ zur Gleichung, da die linke Seite einen niedrigeren Grad erhält als die rechte.

Mithin gilt:

II′.
$$\left\{\overset{4}{A}, \overset{3}{y}\right\}_2 - \frac{1}{6}\overset{0}{P}.y = 0. \qquad \cong: 6\{A, A\}_4 - P^2 = 0.$$

und:

II″.
$$\left\{\overset{6}{A}, \overset{4}{y}\right\}_2 - \frac{1}{5}\overset{2}{P}.y = 0.$$

$$\cong: 25\{A, A\}_4 - 10\{A, P\}_2 - 4P^2 = 0.$$

Identificiren wir in der obigen Congruenz A und P mit ihren Werten als Combinanten, so muss sich dieselbe auf eine Identität reduciren; die Ausführung der Division ergiebt:

$$-\frac{(n-3)(n-4)(2n-3)^2}{(2n-5)(2n-7)}\{\varphi, \psi\}_5.\text{*)}$$

Dass sich hier $\{\varphi, \psi\}_5$ als simultane Covariante von A und P darstellt, ist nur eine specielle Folgerung des in § 6 bewiesenen Satzes; derselbe ergiebt für $r = 2$ das Theorem:

Jede Combinante des Formenbüschels (φ, ψ), speciell also jede ungerade Ueberschiebung, lässt sich als rationale simultane Covariante der Combinanten $\{\varphi, \psi\}_1$ und $\{\varphi, \psi\}_3$ darstellen, deren Nenner durch eine Potenz der ersteren gebildet wird.

Setzen wir in II speciell $P = 0$, so folgt:

IIa.
$$\left\{\overset{2(n-1)}{f}, \overset{n}{y}\right\}_2 = 0. \qquad \cong: \{f, f\}_4 \equiv 0 \text{ mod } f.$$

Wir können diesen Fall folgendermassen formuliren:

Wenn f die Jacobi'sche Combinante eines Formenbüschels (φ, ψ) mit verschwindender dritter Ueberschiebung ist, so geht die Form f in ihrer vierten Ueberschiebung auf; und umgekehrt hat letztere Eigenschaft zur Folge, dass sich f als Jacobi'sche Combinante eines Formenbüschels mit verschwindender dritter Ueberschiebung auffassen lässt, — vorausgesetzt, dass f von gerader Ordnung ist und nur einfache Factoren enthält.**)

---

*) Cf. Hilbert, „Ueber binäre Formenbüschel mit besonderer Combinanten-Eigenschaft", Mathem. Annalen, Bd. XXX, pag. 563, wo sich diese Relation bereits aufgestellt findet.

**) Dieser Satz bringt eine Frage zur Erledigung, welche Herr Hilbert in der zuletzt genannten Abhandlung pag. 569 aufgeworfen hat.

In der Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\text{III.} \qquad \left\{ \overset{3(n-2)}{A}, \overset{n}{y} \right\}_3 + \left\{ \overset{(3n-10)}{P_2}, y \right\}_1 + \left\{ \overset{3(n-4)}{P_3}, y \right\}_0 = 0$$

sind die Coefficienten, als Combinanten der Integralformen betrachtet:

$$A = (0,\ 1,\ 2),$$

$$P_2 = \frac{(n-3)}{(3n-7)} \left\{ 2\,(0, 2, 3) - (0, 1, 4) \right\},$$

$$P_3 = \frac{(n-3)\,(n-4)}{3(3n-8)(3n-10)} \left\{ 5(0, 2, 4) - 20(1, 2, 3) - 2\,(0, 1, 5) \right\}.$$

$$\cong: \begin{cases} (\alpha) & 3(n-3) \left\{ A, A \right\}_4 + 3(n-5) \left\{ A, P_2 \right\}_2 + 3n \left\{ A, P_3 \right\}_1 \\ & \qquad - (n-1)\, P_2^{\,2} = A\,.\,\Phi, \quad \equiv 0 \text{ mod. } A. \\ (\beta) & 3(n-2) \left\{ A, \Phi \right\}_1 - 5\,(n-4)\,(3n-7) \left\{ A, P_2 \right\}_3 + 9\,(n-5)\,(3n-8) \left\{ A, P_3 \right\}_2 \\ & \qquad - 2(n-1)\,(3n-10)\, P_2\,.\,P_3 \equiv 0 \text{ mod. } A. \end{cases}$$

Für $n = 4$ versagen diese Formeln, da die Bildung $\left\{ \overset{6}{A}, \overset{0}{P_3} \right\}_1$ illusorisch ist. Es folgt daraus, wie sich ja auch unmittelbar an dem für P_3 gegebenen Ausdruck bestätigt, dass P_3 verschwinden muss, so dass wir in diesem Falle erhalten:

$$\text{III}'. \qquad \left\{ \overset{6}{A}, \overset{4}{y} \right\}_3 + \left\{ \overset{2}{P_2}, y \right\}_1 + \left\{ \overset{0}{P_3}, y \right\}_0 = 0\,.$$

$$\cong: \begin{cases} (\alpha) & P_3 = 0\,. \\ (\beta) & \left\{ A, A \right\}_4 - \left\{ A, P_2 \right\}_2 - P_2^{\,2} = 0\,. \end{cases}$$

Ferner folgt für $n = 5$:

$$\text{III}''. \qquad \left\{ \overset{9}{A}, \overset{5}{y} \right\}_3 + \left\{ \overset{5}{P_2}, y \right\}_1 + \left\{ \overset{3}{P_3}, y \right\}_0 = 0\,.$$

$$\cong: \begin{cases} (\alpha) & 6 \left\{ A, A \right\}_4 + 15 \left\{ A, P_3 \right\}_1 - 4\, P_2^{\,2} = A\,.\,\Phi, \qquad \equiv 0 \text{ mod. } A. \\ (\beta) & 9 \left\{ A, \Phi \right\}_1 - 40 \left\{ A, P_2 \right\}_3 - 40\, P_2\,.\,P_3 = 0\,. \end{cases}$$

Setzen wir in III $P_2 = 0$, so erhalten wir:

$$\text{IIIa.} \qquad \left\{ \overset{3\,(n-2)}{A}, \overset{n}{y} \right\}_3 + \overset{3\,(n-4)}{P_3}\,.\,y = 0\,.$$

$$\cong: \begin{cases} (\alpha) & (n-3) \left\{ A, A \right\}_4 + n \left\{ A, P_3 \right\}_1 = A\,.\,\Phi, \equiv 0 \text{ mod. } A. \\ (\beta) & (n-2) \left\{ A, \Phi \right\}_1 + (n-5)\,(3n-8) \left\{ A, P_3 \right\}_2 \equiv 0 \text{ mod. } A. \end{cases}$$

Speciell ist für $n = 4$:

III'a. $$\left\{\overset{6}{A}, \overset{4}{y}\right\}_3 + \overset{0}{P_3}.y = 0.$$

$$\cong : \begin{cases} (\alpha) & P_3 = 0. \\ (\beta) & \{A, A\}_4 = 0, \end{cases}$$

für $n = 5$:

III''a. $$\left\{\overset{9}{A}, \overset{5}{y}\right\}_3 + \overset{3}{P_3}.y = 0.$$

$$\cong : 2\left\{A, A\right\}_4 + 5\left\{A, P_3\right\}_1 = 0.$$

Nehmen wir weiter in IIIa auch $P_3 = 0$ an, so folgt sofort:

IIIb. $$\left\{\overset{3(n-2)}{f}, \overset{n}{y}\right\}_3 = 0. \qquad \cong : \left\{f, f\right\}_4 = 0.$$

Dieser Bedingung genügen bekanntlich die Formen des Tetraeders, Octaeders und Icosaeders.

Die Differentialgleichung vierter Ordnung sei

IV. $$\left\{\overset{4(n-3)}{A}, \overset{n}{y}\right\}_4 + \left\{\overset{4(n-4)}{P_2}, y\right\}_2 + \left\{\overset{2(2n-9)}{P_3}, y\right\}_1 + \left\{\overset{4(n-5)}{P_4}, y\right\}_0 = 0.$$

$$\cong : \begin{cases} (\alpha) \; 10(n-4)\left\{A, A\right\}_4 + 4(n-7)\left\{A, P_2\right\}_2 + 4(n-1)\left\{A, P_3\right\}_1 - (n-2)P_2^2 = A.\Phi, \\ \qquad \equiv 0 \text{ mod. } A. \\ (\beta) \; 2(n-5)(4n-13)\left\{A, P_2\right\}_3 - 3(n-7)(2n-7)\left\{A, P_3\right\}_2 - 4n(n-4)\left\{A, P_4\right\}_1 \\ \qquad -(n-3)\left\{A, \Phi\right\}_1 + (n-2)(n-4)P_2.P_3 = A\Psi, \equiv 0 \text{ mod. } A. \\ (\gamma) \; 2(n-4)^2(2n-7)(4n-17)\left\{A, A\right\}_6 + (n-4)(64n^3-756n^2+2945n-3798)\left\{A, P_2\right\}_4 \\ \qquad - 2(n-4)(2n-7)(32n^2-291n+634)\left\{A, P_3\right\}_3 \\ \qquad + 8(n-4)(8n-33)(4n^2-38n+85)\left\{A, P_4\right\}_2 - 2(n-3)(n-4)(4n-13)\left\{A, \Phi\right\}_2 \\ \qquad + 2(n-3)(8n-33)\left\{A, \Psi\right\}_1 - 2(n-2)(n-4)^2(4n-17)\left\{P_2, P_2\right\}_2 \\ \qquad + 2(n-2)(n-4)^2(8n-33)\left\{P_2, P_3\right\}_1 - (n-2)(n-4)(4n-17)(8n-33)P_2.P_4 \\ \qquad \equiv 0 \text{ mod. } A. \end{cases}$$

Diese Bedingungen vereinfachen sich beträchtlich für den speciellen Fall $n = 5$; es ist dann nämlich Φ vom Grade 0, also constant, Ψ vom Grade (-2), also gleich Null, ebenso geht die Congruenz (γ) in eine Gleichung über. Ferner treten in (γ) die illusorischen Bildungen auf:

$$\left\{\overset{8}{A}, \overset{2}{P_3}\right\}_3 \quad \text{und} \quad 10\left\{\overset{8}{A}, \overset{0}{P_4}\right\}_2 + \left\{\overset{8}{A}, \overset{0}{\Phi}\right\}_2,$$

woraus zu schliessen ist, dass

$$P_3 \quad \text{und} \quad (10\,P_4 + \Phi)$$

identisch verschwinden müssen. Damit ist dann die Bedingung von (β) von selbst erfüllt, und (α) und (γ) reduciren sich auf:

$$(\alpha') \qquad 10\{A, A\}_4 - 8\{A, P_2\}_2 + 10\,A\,.\,P_4 - 3\,P_2{}^2 = 0\,.$$

$$(\gamma') \qquad 2\{A, A\}_6 + 3\{A, P_2\}_4 - 2\{P_2, P_2\}_2 - 7\,P_2\,.\,P_4 = 0\,.$$

Nennen wir die linke Seite von (α') U, von (γ') V, so sind U und V, wie eine genauere Untersuchung zeigt, durch die Relation verbunden:

$$2\left\{\overset{8}{A}, \overset{8}{U}\right\}_3 + \left\{\overset{4}{P_2}, \overset{8}{U}\right\}_1 = \frac{10}{7}\left\{\overset{8}{A}, \overset{4}{V}\right\}_1\,.$$

Aus der Bedingung $U = 0$ fliesst also die folgende:

$$\{A, V\}_1 = A\,V_1 - A_1\,V = 0\,,$$

mithin:

$$V \equiv 0 \quad \text{mod. } A\,,$$

oder, da V von geringerer Ordnung ist als A: $V = 0$; so dass sich die Bedingung (γ') als notwendige Folge von (α') erweist.

Wir haben so für $n = 5$ das einfache Resultat erhalten:

$$\text{IV}'. \qquad \left\{\overset{8}{A}, \overset{5}{y}\right\}_4 + \left\{\overset{4}{P_2}, y\right\}_2 + \left\{\overset{2}{P_3}, y\right\}_1 + \left\{\overset{0}{P_4}, y\right\}_0 = 0\,.$$

$$\cong : \begin{cases} (\alpha) \quad P_3 = 0\,. \\ (\beta) \quad 10\{A, A\}_4 - 8\{A, P_2\}_2 + 10\,A\,.\,P_4 - 3\,P_2{}^2 = 0\,. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt in IV $P_2 = 0$, so ergiebt sich:

$$\text{IVa.} \qquad \left\{\overset{4(n-3)}{A}, \overset{n}{y}\right\}_4 + \left\{\overset{2(2n-9)}{P_3}, y\right\}_1 + \left\{\overset{4(n-5)}{P_4}, y\right\}_0 = 0.$$

$$\cong : \begin{cases} (\alpha) \quad 5(n-4)\{A, A\}_4 + 2(n-1)\{A, P_3\}_1 = A\,.\,\Phi, \equiv 0 \text{ mod. } A. \\ (\beta) \quad 3(n-7)(2n-7)\{A, P_3\}_2 + 4n(n-4)\{A, P_4\}_1 + 2(n-3)\{A, \Phi\}_1 = A\,.\,\Psi, \equiv 0 \text{ mod. } A. \\ (\gamma) \quad (n-4)^2\,(2n-7)\,(4n-17)\,\{A, A\}_6 - (n-4)\,(2n-7)\,(32n^2 - 291n + 634)\,\{A, P_3\}_3 \\ \qquad + 4(n-4)\,(8n-33)\,(4n^2 - 38n + 85)\{A, P_4\}_2 - 2(n-3)\,(n-4)\,(4n-13)\,\{A, \Phi\}_2 \\ \qquad\qquad - (n-3)\,(8n-33)\{A, \Psi\}_1 \equiv 0 \text{ mod. } A. \end{cases}$$

Speciell erhalten wir für $n = 5$:

$$\text{IV}'\text{a.} \qquad \left\{\overset{8}{A}, \overset{5}{y}\right\}_4 + \left\{\overset{2}{P_3}, y\right\}_1 + \left\{\overset{0}{P_4}, y\right\}_0 = 0.$$

$$\cong : \begin{cases} (\alpha) \qquad P_3 = 0. \\ (\beta) \qquad \{A, A\}_4 + A\,.\,P_4 = 0. \end{cases}$$

Für $n = 7$ schliessen wir aus der Congruenz (β), dass

$$21\,P_4 + 2\,\Phi = 0 \text{ und } \Psi = 0$$

ist, wodurch die Kriterien der Gleichung

$$\text{IV}''\text{a.} \qquad \left\{\overset{16}{A}, \overset{7}{y}\right\}_4 + \left\{\overset{10}{P_3}, y\right\}_1 + \left\{\overset{8}{P_4}, y\right\}_0 = 0$$

sich reduciren auf

$$\cong: \begin{cases} (\alpha) \quad 10\{A, A\}_4 + 8\{A, P_3\}_1 + 7A.P_4 = 0. \\ (\beta) \quad 7\{A, A\}_6 - 35\{A, P_3\}_3 + 80\{A, P_4\}_2 \equiv 0 \text{ mod. } A. \end{cases}$$

Specialisirt man IVa weiter durch die Annahme, dass $P_3 = 0$, so findet man:

(α') $\{A, A\}_4 = A.\Phi, \equiv 0$ mod. A,

(β') $2n P_4 + 5(n-3)\Phi = 0;$ $\Psi = 0,$

(γ') $n(n-4)(2n-7)\{A, A\}_6 - 30(n-3)(n-5)(3n-11)\{A, \Phi\}_2 \equiv$ mod. A.

Nun überzeugt man sich aber leicht, dass aus Gleichung (α') die Congruenz fliesst:

$$6(n-3)(n-5)\{A, \Phi\}_2 + (n-4)(2n-9)\{A, A\}_6 \equiv 0 \text{ mod. } A;$$

daraus geht denn hervor:

IVb. $$\{\overset{4(n-3)}{A}, \overset{n}{y}\}_4 + \overset{4(n-5)}{P_4} : y = 0.$$

$$\cong: \begin{cases} (\alpha) \quad 5(n-3)\{A, A\}_4 + 2n\, A.P_4 = 0. \\ (\beta) \quad \{A, A\}_6 \equiv 0 \text{ mod. } A, \text{ oder } \{A, P_4\}_2 \equiv 0 \text{ mod. } A, \end{cases}$$

und im besonderen für $n = 5$:

IV'b. $$\{\overset{8}{f}, \overset{5}{y}\}_4 + \overset{0}{\lambda}.y = 0.$$

$$\cong: \{f, f\}_4 + \lambda.f = 0.$$

Bekanntlich giebt es nur *eine* Form, welche letztere Bedingung erfüllt, die des Hexaeders.

Endlich erhalten wir aus IVb, wenn wir auch $P_4 = 0$ setzen:

IVc. $$\{\overset{4(n-3)}{f}, \overset{n}{y}\}_4 = 0. \quad \cong: \{f, f\}_4 = 0.$$

Damit ist die Discussion der Differentialgleichungen der ersten vier Ordnungen vollständig erledigt.

Betrachten wir jetzt die Differentialgleichung r-ter Ordnung

(R) $$\{A, y\}_r + \{P_4, y\}_{r-4} + \{P_5, y\}_{r-5} + \ldots + \{P_r, y\}_0 = 0,$$

in welcher P_2 und P_3 gleich Null genommen sind. Die beiden ersten Kriterien derselben lauten:

(α) $$a_{20}\{A, A\}_4 + c_{22}\, A.\Phi_2 = 0,$$

(β) $$a_{34}\{A, P_4\}_1 + c_{32}\{A, \Phi_2\}_1 + c_{33}\, A.\Phi_3 = 0.$$

Aus letzterer Gleichung schliessen wir, dass einzeln

$$a_{34}\, P_4 + c_{32}\, \Phi_2 = 0 \text{ und } \Phi_3 = 0$$

ist, wodurch sich die weiteren Kriterien reduciren. Die Bedingung (α) sagt ferner aus:

Wenn die Combinanten P_2 und P_3 identisch verschwinden, so geht die Jacobi'sche Combinante in ihrer vierten Ueberschiebung auf, und die Combinante P_4 ist proportional dem Resultat der Division. Das Verschwinden der

Combinanten P_2, P_3, P_4 hat zur Folge, dass die vierte Ueberschiebung der Jacobi'schen Combinante identisch Null wird.

Als Beispiel zu (R) untersuchen wir die Differentialgleichung fünfter Ordnung:

V. $$\left\{\overset{5(n-4)}{A},\ \overset{n}{y}\right\}_5 + \left\{\overset{5n-28}{P_4},\ y\right\}_1 = 0.$$

Nach einigen Reductionen findet man die Kriterien:

$$\cong:\begin{cases}(\alpha) & 75(n-4)(n-5)\{A, A\}_4 + 2(n-1)(5n-24)\ A \,.\, P_4 = 0.\\ (\beta) & \{A, A\}_6 = 0;\end{cases}$$

für $n = 6$ aber einfacher:

V'. $$\left\{\overset{10}{A},\ \overset{6}{y}\right\}_5 + \left\{\overset{2}{P_4},\ y\right\}_1 = 0.$$

$$\cong:\ 5\{A, A\}_4 + 2\ A \,.\, P_4 = 0.$$

Als ein Beispiel, in welchem die drei Combinanten P_2, P_3, P_4 verschwinden, erwähnen wir die Differentialgleichung sechster Ordnung

VI. $$\left\{\overset{12}{f},\ \overset{7}{y}\right\}_6 + \overset{0}{\lambda} \,.\, y = 0.$$

$$\cong:\ \{f, f\}_6 + \lambda \,.\, f = 0,$$

wo f die hier allein in Frage kommende Icosaederform vorstellt.

Es mögen hier schliesslich noch einige einfachste Beispiele zu der in § 12 betrachteten Klasse von Differentialgleichungen Platz finden, deren Hauptdeterminante ein vollständiges Quadrat ist. Die inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung der genannten Klasse lautet:

(A) $$\left\{\overset{n}{f},\ \overset{2n}{y}\right\}_1 = \overset{3n-2}{\varphi}.$$

$$\cong:\ 2(3n-2)\ \{f, (f, \varphi)_3\}_1 + (n-1)\ \varphi \,.\, \{f, f\}_4 \equiv 0 \ \text{mod. f.}$$

Für die Differentialgleichung zweiter Ordnung findet man:

(B) $$\left\{\overset{n-1}{f},\ \overset{n}{y}\right\}_2 + \overset{n-5}{\varphi} \,.\, y = 0.$$

$$\cong:\ 12(n-3)(n-4)\begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2\\ f_1 & f_2 & f_3\\ f_2 & f_3 & f_4\end{vmatrix} - 4(n-5)(n-6)\{f, (f, \varphi)_3\}_1 + 12n(n-5)\varphi \,.\, \{f, \varphi\}_2$$
$$+ (n^2 + 4n - 24)\varphi \,.\, \{f, f\}_4 - 6n^2\varphi^3 \equiv 0 \ \text{mod. f.}$$

Beispielsweise ist für $n = 5$:

(B') $$\left\{\overset{4}{f},\ \overset{5}{y}\right\}_2 + \overset{0}{\lambda} \,.\, y = 0.$$

$$\cong:\ 8\begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2\\ f_1 & f_2 & f_3\\ f_2 & f_3 & f_4\end{vmatrix} + 7\lambda \,.\, \{f, f\}_4 - 50\lambda^3 = 0.$$

Nehmen wir in (B) speciell $\varphi = 0$ an, so vereinfacht sich das Kriterium wesentlich; wir erhalten nämlich:

$$\text{(Ba)} \qquad \left\{ \overset{n-1}{f}, \overset{n}{y} \right\}_2 = 0 . \qquad \cong : \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ mod. } f;$$

ausgenommen den Fall $n = 4$, in welchem die Bedingung ganz wegfällt.

$$\text{(C)} \qquad \left\{ \overset{3(n-1)}{f}, \overset{2n}{y} \right\}_3 = 0 .$$

$$\cong : \begin{cases} (\alpha) & \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix} = f . \Phi, \quad \equiv 0 \text{ mod. } f. \\ (\beta) & 90(n-1)(n-3)\Phi + (2n-3)(3n-7) \left\{ f, f \right\}_6 \equiv 0 \text{ mod. } f. \end{cases}$$

Für $n = 5$ erfüllt die Icosaederform diese Bedingungen. Für $n = 3$ indes kommt die Forderung (α) in Wegfall und es gilt:

$$\text{(C')} \qquad \left\{ \overset{6}{f}, \overset{6}{y} \right\}_3 = 0 . \qquad \cong : \left\{ f, f \right\}_6 = 0.$$

$$\text{(D)} \qquad \left\{ \overset{2(n-3)}{f}, \overset{n}{y} \right\}_4 = 0 .$$

$$\cong : \begin{cases} (\alpha) & \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix} = f . \Phi, \quad \equiv 0 \text{ mod. } f. \\ (\beta) & 12(n-3)(n-8)\Phi + (n-4)(n-5) \left\{ f, f \right\}_6 \equiv 0 \text{ mod. } f. \\ (\gamma) & \left\{ f, (f, f)_6 \right\}_2 \equiv 0 \text{ mod. } f. \end{cases}$$

Für $n = 6$ erfüllt diese Bedingungen die Octaederform.

Für $n = 8$ indes fällt die Congruenz (α) fort, und es bleibt:

$$\text{(D')} \qquad \left\{ \overset{10}{f}, \overset{8}{y} \right\}_4 = 0. \qquad \cong : \left\{ f, f \right\}_6 = 0.$$

§ 14.

Die r-fache Mannigfaltigkeit von Formen (r+1)-ter Stufe.

Bei den Beispielen des vorhergehenden Paragraphen hatten wir Gelegenheit zu bemerken, dass sich die Kriterien besonders einfach gestalten, wenn $n = (r+1)$ ist, wenn also die Ordnung der Integralformen die Ordnung der Differentialgleichung um 1 übertrifft. Wir werden daher diesen Fall für sich behandeln; statt aber direct die Discussion der allgemeinen Kriterien in Angriff zu nehmen, was mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden wäre, schlagen wir einen andern Weg ein. — Wir fragen zunächst, wie sich die Coefficienten der Differentialgleichung

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix}2r & r+1\\ A, & y\end{matrix}\right\}_r + \sum_{\varkappa=2}^{r} \left\{\begin{matrix}2(r-\varkappa) & \\ P_\varkappa, & y\end{matrix}\right\}_{r-\varkappa} = 0,$$

als Combinanten der Integralformen betrachtet, durch die letzteren explicit darstellen. Wir erhalten die gewünschte Darstellung unmittelbar, indem wir in der allgemeinen Formel (7) des § 7 $n = (r+1)$ setzen; und zwar ergiebt sich:

$$(2)\ P_\varkappa = \frac{(-1)^r\ (2r-2\varkappa+1)!}{(r-\varkappa)!\,(r-\varkappa)!\,(2r-\varkappa+2)!}\sum_{\tau_0,\tau_1} G_{\tau_0,\tau_1}\Big\{(-1)^{\tau_0}\tau_0!\,(2r+1-\varkappa-\tau_0)!-(-1)^{\tau_1}\tau_1!(2r+1-\varkappa-\tau_1)!\Big\},$$

wo sich die Summation auf die Werte τ_0, τ_1 erstreckt, welche den Bedingungen genügen:

$$(r-\varkappa) \leqq \tau_0 < \tau_1 \leqq (r+1);\quad \tau_0+\tau_1 = (2r+1-\varkappa),$$

während mit $G_{\tau_0 \tau_1}$ die Determinante

$$\left| f_{\mu\nu} \right| \quad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \dots r \\ \nu = 0, 1, \dots (\tau_0-1);\ (\tau_0+1), \dots (\tau_1-1);\ (\tau_1+1), \dots r,\ (r+1)\end{pmatrix}$$

bezeichnet ist. Demnach können wir (2) wie folgt schreiben:

$$(2')\qquad P_\varkappa = \frac{(-1)^r\ (2r-2\varkappa+1)!}{(r-\varkappa)!\ (r-\varkappa)!\ (2r-\varkappa+2)!}\sum_{\tau_0,\tau_1}(-1)^{\tau_0}\ \tau_0!\ \tau_1!\ \Big\{1+(-1)^\varkappa\Big\}\ G_{\tau_0 \tau_1};$$

woraus unmittelbar hervorgeht, dass die Grössen $P_\varkappa$ von ungeradem Index identisch verschwinden. Wir haben also folgendes Theorem gewonnen:

Die Elementarcombinanten $P_\varkappa$ der r-fachen Mannigfaltigkeit von Formen (r+1)-ter Ordnung, deren Index $\varkappa$ eine ungerade Zahl ist, verschwinden identisch.

Die Combinanten, welche in den Ableitungen jeder Grundform linear sind, setzen sich linear aus Determinanten der Gestalt

$$\left| f_{i0}\ f_{i1} \dots f_{i,\,\sigma-1}\ f_{i,\,\sigma+1} \dots f_{i,\,\tau-1}\ f_{i,\,\tau+1} \dots f_{i,\,r+1} \right|$$

zusammen. Letztere lassen sich aber darstellen durch eine Summe von Determinanten

$$\left| f_{i0}\ f_{i1} \dots f_{i,\,\varrho-1}\ f_{i,\,\varrho+1} \dots f_{ir} \right|$$

und deren Ableitungen. Daraus entnehmen wir leicht folgenden Satz:

Die einzigen in den Ableitungen jeder Grundform linearen Combinanten der r-fachen Mannigfaltigkeit von Formen (r+1)-ter Ordnung sind die Elementarcombinanten mit geradem Index.

Insbesondere sehen wir, dass die in den Kriterien auftretenden Combinanten Φ_3, Φ_5, $\Phi_7, \dots$ identisch verschwinden, während sich die Combinanten Φ_2, Φ_4, $\Phi_6, \dots$ nur durch einen Factor bez. von P_4, P_6, $P_8, \dots$ unterscheiden. — Beiläufig sei erwähnt, dass diese Resultate sich auch aus dem Umstande ableiten lassen, dass das zu dem betrachteten apolare Formensystem ein Büschel von zwei Formen (r+1)-ter Ordnung ist.

Setzen wir nun die Forderung, dass die Grössen $P_\varkappa$ mit ungeradem Index verschwinden, bereits als erfüllt voraus, so reduciren sich die Kriterien für die Gleichung (1) auf die folgenden Bedingungen:

$$(3)\qquad a_{\varrho 0}\left\{A, A\right\}_{\varrho+2}+\bar{a}_{\varrho 2}\left\{A, P_2\right\}_{\varrho}+a_{\varrho 4}\left\{A, P_4\right\}_{\varrho-2}+a_{\varrho 6}\left\{A, P_6\right\}_{\varrho-4}$$
$$+\ldots+b_{\varrho 2}\left\{P_2, P_2\right\}_{\varrho-2}+b_{\varrho 4}\left\{P_2, P_4\right\}_{\varrho-4}+b_{\varrho 6}\left\{P_2, P_6\right\}_{\varrho-6}+\ldots=0.$$
$$(\varrho=2, 3, \ldots r)$$

Hier haben die Constanten, wie die genauere Entwicklung zeigt, die folgenden Werte:

$$(4)\qquad a_{\varrho\varkappa}=(-1)^{\varkappa}(r-\varkappa)_{\varrho-\varkappa}\frac{2r!}{(2r-\varrho+\varkappa-2)!}\,\frac{(4r-2\varrho-3)!}{(4r-\varrho-\varkappa-1)!}\left\{\frac{3(3r-1)}{2(2r-1)}(2r-\varrho-\varkappa).\right.$$
$$\left.(2r-\varrho-\varkappa-1)-\frac{3(\varrho+2)(r-\varrho)(2r-\varrho-\varkappa-1)}{(\varrho-\varkappa+1)}+\frac{(\varrho+2)(\varrho+3)(r-\varrho)(r-\varrho-1)}{(\varrho-\varkappa+1)(\varrho-\varkappa+2)}\right\}.$$
$$b_{\varrho\varkappa}=(-1)^{\varkappa+1}\,6.(r-\varkappa)_{\varrho-\varkappa}\frac{(2r-4)!}{(2r-\varrho+\varkappa-4)!}\,\frac{(4r-2\varrho-3)!}{(4r-\varrho-\varkappa-3)!}.$$
$$\bar{a}_{\varrho 2}=a_{\varrho 2}+(-1)^{\varrho}\,b_{\varrho 0}.$$

Es ist zu vermuten, dass ein Teil dieser Bedingungen eine identische Folge der übrigen sein wird; und in der That zeigt eine allgemeine Ueberlegung, die wir hier indes nicht durchführen wollen, Folgendes:

Wenn r gerade ist, so sind von den in (3) angegebenen Bedingungen die den Zahlen
$$\varrho=2, 4, 6, \ldots (r-2),$$
wenn r ungerade ist, die den Zahlen
$$\varrho=2, 4, 6, \ldots (r-3)$$
entsprechenden notwendig und hinreichend.

§ 15.

Differentialgleichungen mit linearen Transformationen in sich.

Zum Abschluss unserer Untersuchungen betrachten wir eine Klasse von Differentialgleichungen, deren charakteristische Eigenschaft einen Ausblick aus dem Gebiete der rationalen Functionen in die in der Einleitung angedeuteten höheren Functionsgebiete eröffnet. Diese Eigenschaft besteht darin, dass die Coefficienten A, $P_{\varkappa}$ der Differentialgleichung

$$(1)\qquad \left\{A, y\right\}_r+\sum_{\varkappa=2}^{r}\left\{P_{\varkappa}, y\right\}_{r-\varkappa}=0$$

sich gegenüber den Transformationen einer endlichen Gruppe (des Tetraeders, Octaeders oder Icosaeders) invariant verhalten und zwar mit denselben constanten Factoren reproduciren. Durch diese Transformationen wird die Gleichung in sich übergeführt, woraus das folgende Theorem hervorgeht:

Die Gruppe von homogenen linearen Substitutionen der binären Argumente x_1, x_2, welche die Coefficienten A, $P_{\varkappa}$ der Differentialgleichung (1) in sich überführen, erzeugt eine Gruppe von homogenen linearen Substitutionen der Integralformen, welche isomorph auf jene bezogen ist.

Umgekehrt: Erzeugt eine Gruppe von homogenen linearen Substitutionen der Argumente x_1, x_2 eine isomorphe Gruppe von Collineationen einer Formen-Mannigfaltigkeit in sich, so verhalten sich die Coefficienten der durch letztere erfüllten linearen Differentialgleichung in deren invarianter Gestalt (1) den obigen Substitutionen der Argumente gegenüber selbst invariant.

Um eine Anwendung dieses Satzes zu geben, behandeln wir folgende Aufgabe:

Alle Formensysteme aufzustellen, deren Jacobi'sche Combinante sich durch die Form eines der fünf regulären Körper darstellt, und welche bei Anwendung der homogenen Substitutionen der zu demselben gehörenden endlichen Gruppe auf die Argumente x_1, x_2 Collineationen in sich erfahren.

Wir lösen diese Aufgabe, indem wir die Differentialgleichungen aufsuchen, welchen die in Frage kommenden Formen Genüge leisten. Mit Hilfe der bekannten Sätze über den Formenkreis der regulären Körper*) erhält man die in der folgenden Tabelle aufgeführten Gleichungen. Wo sich die Integration a priori leisten lässt, sind die Integrale gleich angegeben; die Integration der übrigen Differentialgleichungen geschieht in elementarer Weise, worauf wir nicht weiter eingehen.

I $\overset{4}{f}$ = Tetraederform.

(1) $\left\{f, \overset{3}{y}\right\}_2 = 0. \qquad y = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \text{ wo } \overset{4}{\varphi} = (f, f)_2.$

(2) $\left\{f, \overset{4}{y}\right\}_4 = 0.$

II $\overset{6}{f}$ = Octaederform.

(1) $\left\{f, \overset{4}{y}\right\}_2 = 0.$ $\qquad y$ = Tetraeder- und Gegentetraederform.

(2) $\left\{f, \overset{4}{y}\right\}_3 = 0. \qquad y = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$

(3) $\left\{f, \overset{6}{y}\right\}_6 = 0.$

III $\overset{8}{\varphi}$ = Hexaederform.

(1) $\left\{\varphi, \overset{5}{y}\right\}_2 = 0. \qquad y = \frac{\partial \overset{6}{f}}{\partial x_1}, \frac{\partial \overset{6}{f}}{\partial x_2}.$

(2) $\left\{\varphi, \overset{5}{y}\right\}_4 - \overset{-1}{\varphi} \cdot \left\{\varphi, \varphi\right\}_4 \cdot y = 0. \qquad y = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3}, \ldots \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_2^3}.$

(3) $\left\{\varphi, \overset{8}{y}\right\}_8 = 0.$

---

*) Siehe Klein, Vorlesungen über das Icosaeder, pag. 51 ff.

IV $\overset{12}{f} = $ Icosaederform.

(1) $\left\{f, \overset{7}{y}\right\}_2 = 0\,.$

(2) $\left\{f, \overset{6}{y}\right\}_3 = 0\,.$

(3) $\left\{f, \overset{6}{y}\right\}_4 = 0\,.$

(4) $\left\{f, \overset{7}{y}\right\}_6 - \overset{-1}{f}\,.\left\{f, f\right\}_6 . \, y = 0\,. \qquad y = \frac{\partial^5 f}{\partial x_1^{\,5}}, \; \ldots \frac{\partial^5 f}{\partial x_2^{\,5}}.$

(5) $\left\{f, \overset{12}{y}\right\}_{12} = 0\,.$

V $\overset{20}{\varphi} = $ Dodecaederform.

(1) $\left\{\varphi, \overset{11}{y}\right\}_2 = 0. \qquad y = \frac{\partial \overset{12}{f}}{\partial x_1}, \; \frac{\partial \overset{12}{f}}{\partial x_2}.$

(2) $\left\{\varphi, \overset{8}{y}\right\}_4 - \frac{25}{16}\,\overset{-1}{\varphi}\,.\left\{\varphi, \varphi\right\}_4 . \, y = 0\,.$

(3) $\left\{\varphi, \overset{8}{y}\right\}_5 - \frac{225}{56}\left\{\overset{-1}{\varphi}\,(\varphi, \varphi)_4, y\right\}_1 = 0. \qquad y = \frac{\partial^4 \overset{12}{f}}{\partial x_1^{\,4}}, \; \ldots \frac{\partial^4 \overset{12}{f}}{\partial x_2^{\,4}}.$

(4) $\left\{\varphi, \overset{11}{y}\right\}_{10} - \frac{165}{4}\left\{\overset{-1}{\varphi}\,(\varphi, \varphi)_4, y\right\}_6 + \frac{4\,.\,17^2}{7\,.\,25}\,\overset{-1}{\varphi}\,.\left\{\varphi, \varphi\right\}_{10} . \, y = 0\,.$

$$y = \frac{\partial^9 \varphi}{\partial x_1^{\,9}}, \; \ldots \frac{\partial^9 \varphi}{\partial x_2^{\,9}}.$$

(5) $\left\{\varphi, \overset{20}{y}\right\}_{20} = 0\,.$